дається формулою

$$\sqrt{a_0} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\nu_0}\int\limits_0^{t_0}\frac{\mu'(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

і /7/ з заміною $\alpha(t)$ на $a_0(t)$.

1. Б е з н о щ е н к о Н.Я. Достаточные условия существования решения задач определения коэффициентов при старших производных параболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 11. С. 1908-1915. 2. И с к е н д е р о в А.Д. Многомерные обратные задачи для линейных и квазилинейных параболических уравнений // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225. № 5. С. 1005-1008. 3. Р а т ы н и А.К. Об определении постоянного коэффициента уравнения теплопроводности // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 11. С. 1928-1937. 4. Т и х о н о в А.Н., А р с е н и н В.Я. Методы решения некорректных задач. М., 1986. 5. D ü m m e l S. Inverse problems for the heat equation // Probl. und Meth. math. Phys. 8 Tag. Karl-Marx-Stadt, 20-24 Juni. 1984. P. 21-26. 6. L o r e n z i A. Determination of a timedependent coefficient in a quasi-linear parabolic equation // Ric. Mat. 1983. Vol. 32. № 2. P. 263-284.

Стаття надійшла до редколегії 29.06.87

УДК 517.956

Г.М.Закопець

УЗАГАЛЬНЕНА ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ У ПІВПРОСТОРІ $(n > 3)$

Розглядаємо задачу Діріхле для бігармонічного рівняння у півпросторі, коли граничні значення – узагальнені функції. Виконання граничних умов розуміємо в сенсі [1]. У класичній постановці задача досліджена в [3].

Нехай $D(\mathbb{R}^{n-1})$ – простір фінітних нескінченно-диференційовних функцій на $\mathbb{R}^{n-1}$, $D'(\mathbb{R}^{n-1})$ – простір лінійних неперервних функціоналів на $D(\mathbb{R}^{n-1})$, $E'(\mathbb{R}^{n-1})$ – простір узагальнених функцій з $D'(\mathbb{R}^{n-1})$ і компактними носіями. Дію узагальненої функції F на основну φ позначаємо (F, φ) [2].

<u>Постановка задачі.</u> Нехай $F, G \in D'(\mathbb{R}^{n-1})$. Знайти розв"язок рівняння

$$\Delta^2 u(x) = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n_+ = \{x : x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_n > 0\}, \qquad /1/$$

який задовольняє граничні умови

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^{n-1}_{\varepsilon}} u(x_\varepsilon)\varphi(x_\varepsilon)\,dx_\varepsilon = (F, \varphi(x')), \quad \forall\varphi\in D(\mathbb{R}^{n-1}), \qquad /2/$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^{n-1}_{\varepsilon}} \left(\partial u(x_\varepsilon)/\partial\nu_{x_\varepsilon}\right)\varphi(x_\varepsilon)\,dx_\varepsilon = (G, \varphi(x')), \quad \forall\varphi\in D(\mathbb{R}^{n-1}), \qquad /3/$$

де $x_\varepsilon = x + \varepsilon\nu_x$; $\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(x')$; $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^{n-1}_\varepsilon = \{x : x\in\mathbb{R}^n,\ x_n = \varepsilon\}$; $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$; $0<\varepsilon<\varepsilon_0$; ν_x – орт внутрішньої нормалі до $\mathbb{R}^{n-1}$ у точці x.

Справедливі наступні твердження.

Лема 1. Для довільної функції $\varphi(x')\in D(\mathbb{R}^{n-1})$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{n\varepsilon^3\varphi(x')\,dx'}{\alpha_n\left[|x'-s'|^2+\varepsilon^2\right]^{(n/2)+1}} = \varphi(s'),$$

де

$$\alpha_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dt'}{\left[1+|t'|^2\right]^{n/2}}.$$

Лема 2.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\varepsilon^2\varphi(x')\,dx'}{\alpha_n\left[|x'-s'|^2+\varepsilon^2\right]^{n/2}} = 0, \quad \forall\varphi\in D(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Лема 3.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial}{\partial\nu_{x_\varepsilon}}\left[\frac{\varepsilon^2}{\alpha_n\left[|x'-s'|^2+\varepsilon^2\right]^{n/2}}\right]\varphi(x')\,dx' = \varphi(s'), \quad \forall\varphi\in D(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Лема 4.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial}{\partial\nu_{x_\varepsilon}}\left[\frac{n\varepsilon^3}{\alpha_n\left[|x'-s'|^2+\varepsilon^2\right]^{(n/2)+1}}\right]\varphi(x')\,dx' = 0, \quad \forall\varphi\in D(\mathbb{R}^{n-1}).$$

При доведенні цих лем використана методика з праці [3].

Теорема 1. Нехай $F, G\in E'(\mathbb{R}^{n-1})\subset D'(\mathbb{R}^{n-1})$. Тоді функція

$$u(x) = \left(G(s'),\ \frac{x_n^2}{\alpha_n\left[|x'-s'|^2+x_n^2\right]^{n/2}}\right) + \left(F(s'),\ \frac{nx_n^3}{\alpha_n\left[|x'-s'|^2+x_n^2\right]^{(n/2)+1}}\right) \qquad /4/$$

є розв"язком задачі /1/ – /3/.

Доведення. Підставляючи /4/ в /1/, легко переконатися, що функція $u(x)$ бігармонічна в $\mathbb{R}^n_+$. У тому, що вона задовольняє умови /2/, /3/, переконуємось, використовуючи неперервність функціоналів F, G, аналог теореми Фубіні та леми 1–4. Теорема доведена.

Бігармонічна функція $u(x)$ належить класу K [3], якщо її можна зобразити у вигляді

$$u(x) = \varphi(x) + x_n \psi(x),$$

де

1/ $\varphi(x), \psi(x)$ - гармонічні функції для $x_n > 0$;

2/ $\varphi(x) = O(r^{\alpha}), \psi(x) = O(r^{\alpha}), r^2 = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \to \infty$;

α - константа; $\alpha \in (0,1)$;

3/ $x_n \psi(x) \to 0$ при $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \to (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$.

Теорема 2. Розв"язок задачі /1/-/3/ єдиний у класі бігармонічних функцій K.

При доведенні цієї теореми використовується методика з праці [1].

1. Гупало Г.С. Про узагальнену задачу Діріхле // Доп. АН УРСР. 1966. № 7. С. 843-846. 2. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М., 1965. 3. Bazański F., Fzydzicn Z. O zagadnieniu bigarmonicznym dla półprzestrzeni w przypadku n-wymiarowym // Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego. 1964. Seria I. Prace Matematyczne VIII. S.221-237.

Стаття надійшла до редколегії 23.03.87

УДК 517.956

Г.-В.С.Гупало, Л.Ю.Кашицька

ПРО УЗАГАЛЬНЕНУ ЗАДАЧУ РІК"Є
ДЛЯ БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ

У класичній постановці задача Рік"є для бігармонічного рівняння в півплощині і півпросторі / $n \geqslant 3$ / розглянута у працях [1, 2, 4]. Доведені теореми про зображення розв"язку задачі через задані граничні значення і теореми єдиності у певному класі бігармонічних функцій [4]. Досліджені [1, 2] класична розв"язність цієї задачі у півплощині та граничні властивості розв"язків при більш загальних умовах ніж у [4]. Ми розглянемо цю задачу за умови, що задані граничні значення є узагальненими функціями. Виконання граничних умов розуміємо у сенсі праці [3].

Нехай $D(R^{n-1})$ - простір фінітних нескінченно диференційованих функцій $\varphi(x'), x' \in R^{n-1}$, $D'(R^{n-1})$ - простір лінійних неперервних функціоналів /узагальнених функцій/ на $D(R^{n-1})$; $E'(R^{n-1})$ - простір фінітних узагальнених функцій; $\langle A, \varphi \rangle$ - дія $A \in D'(R^{n-1})$ на $\varphi \in D(R^{n-1})$.