Бігармонічна функція $U(x)$ належить класу K [3], якщо її можна зобразити у вигляді

$$U(x) = \varphi(x) + x_n \psi(x),$$

де

1/ $\varphi(x), \psi(x)$ - гармонічні функції для $x_n > 0$;

2/ $\varphi(x) = O(r^\alpha)$, $\psi(x) = O(r^\alpha)$, $r^2 = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \to \infty$;

α - константа; $\alpha \in (0,1)$;

3/ $x_n \psi(x) \to 0$ при $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \to (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$.

Теорема 2. Розв"язок задачі /1/-/3/ єдиний у класі бігармонічних функцій K.

При доведенні цієї теореми використовується методика з праці [1].

1. Гупало Г.С. Про узагальнену задачу Діріхле // Доп. АН УРСР. 1966. № 7. С. 843-846. 2. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М., 1965. 3. Barański F.; Frydzicn Z. O zagadnieniu biharmonicznym dla półprzestrzeni w przypadku n-wymiarowym // Roczniki Polskego Towarzystwa Matematycznego. 1964. Seria I. Prace Matematyczne VIII. S.221-237.

Стаття надійшла до редколегії 23.03.87

УДК 517.956

Г.-В.С.Гупало, Л.Ю.Кашицька

ПРО УЗАГАЛЬНЕНУ ЗАДАЧУ РІК"Є ДЛЯ БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ

У класичній постановці задача Рік"є для бігармонічного рівняння в півплощині і півпросторі /$n \geq 3$/ розглянута у працях [1, 2, 4]. Доведені теореми про зображення розв"язку задачі через задані граничні значення і теореми єдиності у певному класі бігармонічних функцій [4]. Досліджені [1, 2] класична розв"язність цієї задачі у півплощині та граничні властивості розв"язків при більш загальних умовах ніж у [4]. Ми розглянемо цю задачу за умови, що задані граничні значення є узагальненими функціями. Виконання граничних умов розуміємо у сенсі праці [3].

Нехай $D(R^{n-1})$ - простір фінітних нескінченно диференційованих функцій $\varphi(x')$, $x' \in R^{n-1}$, $D'(R^{n-1})$ - простір лінійних неперервних функціоналів /узагальнених функцій/ на $D(R^{n-1})$; $E'(R^{n-1})$ - простір фінітних узагальнених функцій; $\langle A, \varphi \rangle$ - дія $A \in D'(R^{n-1})$ на $\varphi \in D(R^{n-1})$.

Постановка задачі. Нехай $A, B \in D'(R^{n-1})$. Знайти розв"язок $u(x)$ бігармонічного рівняння

$$\Delta^2 u = 0 \quad \text{в} \quad R^n_+ = \{(x', x_n): x' \in R^{n-1},\ x_n > 0\},\ n \geq 2, \qquad /1/$$

який задовольняє граничні умови

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{R^{n-1}_\varepsilon} u(x_\varepsilon)\psi(x_\varepsilon)dx_\varepsilon = \langle A, \psi \rangle,\ \forall \psi \in D(R^{n-1}), \qquad /2/$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{R^{n-1}_\varepsilon} \Delta u(x_\varepsilon)\psi(x_\varepsilon)dx_\varepsilon = \langle B, \psi \rangle,\ \forall \psi \in D(R^{n-1}), \qquad /3/$$

де $\psi(x_\varepsilon) = \psi(x)$, якщо $x_\varepsilon = x + \varepsilon\nu(x)$, $x_\varepsilon \in R^{n-1}_\varepsilon$, $x \in R^{n-1}$, $\nu(x)$ - орт внутрішньої нормалі до R^{n-1} у точці x, $R^{n-1}_\varepsilon = \{(x', x_n): x' \in R^{n-1}, x_n = \varepsilon\}$, Δ - оператор Лапласа.

Справедливі такі твердження.

Лема. Для $\forall \psi \in D(R^{n-1})$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{a_n} \int_{R^{n-1}} \frac{\psi(x')}{(|x'-s'|^2+\varepsilon^2)^{n/2}} dx' = \psi(s'),$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{2(2-n)a_n} \int_{R^{n-1}} \frac{\psi(x')}{(|x'-s'|^2+\varepsilon^2)^{(n-2)/2}} dx' = 0,$$

де $$a_n = \int_{R^{n-1}} \frac{dt'}{(|t'|^2+1)^{n/2}}; \quad |x'-s'|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - s_i)^2.$$

Справді, в інтегралах робимо заміну змінних $x' = s' + \varepsilon t'$, якобіан якої дорівнює ε^{n-1}. Оскільки $\psi \in D(R^{n-1})$, то можемо перейти до границі під знаком інтегралу.

Теорема 1. Нехай $A, B \in E'(R^{n-1}) \subset D'(R^{n-1})$. Функції

$$u(x,y) = \langle A(s), \frac{y}{\pi} \frac{1}{(x-s)^2+y^2} \rangle + \langle B(s), \frac{y}{4\pi} \ln[(x-s)^2+y^2] \rangle, \qquad /4/$$

$$u(x) = u(x', x_n) = \langle A(s'), \frac{x_n}{a_n} \frac{1}{(|x'-s'|^2+x_n^2)^{n/2}} \rangle +$$

$$+ \langle B(s'), \frac{x_n}{2(2-n)a_n} \frac{1}{(|x'-s'|^2+x_n^2)^{(n-2)/2}} \rangle \qquad /5/$$

з розв"язками задачі Рік"є /І/–/3/ у півплощині R_+^2 і півпросторі R_+^n, $n \geq 3$.

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що функції /4/ і /5/ бігармонічні в R_+^2 і R_+^n, $n \geq 3$. Використовуючи лінійність і неперервність функціоналів, аналог теореми Фубіні та лему, показуємо, що виконуються граничні умови /2/ і /3/. У зв"язку з громіздкістю їх не записуємо.

Легко переконатися, що функції $\langle A(s), \frac{y}{\pi} \frac{1}{(x-s)^2+y^2} \rangle$,

$$\langle B(s), (1/4\pi)\ln[(x-s)^2+y^2] \rangle, \quad \langle A(s'), (x_n/a_n)(1/(|x'-s'|^2+x_n^2)^{n/2}) \rangle,$$

$$\langle B(s'), \frac{1}{2(2-n)a_n} \frac{1}{(|x'-s'|^2+x_n^2)^{(n-2)/2}} \rangle$$

гармонічні в R_+^2 і R_+^n, $n \geq 3$. Отже, ми отримали розв"язки /бігармонічні функції/, які мають вигляд $u(x) = a(x) + x_n b(x)$, де $a(x)$, $b(x)$ – гармонічні функції, причому $x_n b(x) \to 0$, коли $(x', x_n) \to (x_0', 0)$. Клас таких бігармонічних функцій позначимо через K [4].

<u>Теорема 2</u>. Розв"язок задачі /І/–/3/ у класі K бігармонічних функцій єдиний.

При доведенні теореми використана методика з праці [3].

І. Горбайчук В.И. О свойствах решений задачи Рикье для бигармонического уравнения в полуплоскости. // Общая теория граничных задач: Сб. науч. тр. К., 1983. С. 259. 2. Горбайчук В.Й. Умови розв"язності задачі Рік"є для бігармонічного рівняння у півплощині і граничні властивості розв"язків // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1983. № 7. С.9–13. 3. Гупало Г.С. Про узагальнену задачу Діріхле // Доп. АН УРСР. 1966. № 7. С.843–846. 4. *Barański F. Rozwiązanie problemu Riquier w półpłaszyznie i w półprzestrzeni dla równania Biharmonicznego $\Delta^2 u = 0$ // Prace Mat. 1964. № 8. P. 239–251.*

Стаття надійшла до редколегії 06.04.87

УДК 517.956

Г.П. Лопушанська

ПРО ОДИН МЕТОД РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ПАРАБОЛІЧНОЇ ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО СПРЯЖЕННЯ

Метод побудови розв"язку параболічної задачі з нелінійними граничними умовами, запропонований у /2/, переносимо на задачу нелінійного спряження. Розв"язок загальної лінійної параболічної задачі спряження наявний у [1].