з розв"язками задачі Рік"є /І/-/3/ у півплощині R_+^2 і півпросторі R_+^n, $n \geq 3$.

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що функції /4/ і /5/ бігармонічні в R_+^2 і R_+^n, $n \geq 3$. Використовуючи лінійність і неперервність функціоналів, аналог теореми Фубіні та лему, показуємо, що виконуються граничні умови /2/ і /3/. У зв"язку з громіздкістю їх не записуємо.

Легко переконатися, що функції $\langle A(s), \frac{y}{\pi} \frac{1}{(x-s)^2+y^2} \rangle$,

$$\langle B(s), (1/4\pi)\ln[(x-s)^2+y^2] \rangle, \quad \langle A(s'), (x_n/a_n)\left(1/(|x'-s'|^2+x_n^2)^{n/2}\right) \rangle,$$

$$\langle B(s'), \frac{1}{2(2-n)a_n} \frac{1}{(|x'-s'|^2+x_n^2)^{(n-2)/2}} \rangle$$

гармонічні в R_+^2 і $R_+^n, n \geq 3$. Отже, ми отримали розв"язки /бігармонічні функції/, які мають вигляд $u(x)=a(x)+x_n b(x)$, де $a(x), b(x)$ – гармонічні функції, причому $x_n b(x) \to 0$, коли $(x', x_n) \to (x_0', 0)$. Клас таких бігармонійних функцій позначимо через K [4].

<u>Теорема 2</u>. Розв"язок задачі /І/-/3/ у класі K бігармонічних функцій єдиний.

При доведенні теореми використана методика з праці [3].

І. Г о р б а й ч у к В.И. О свойствах решений задачи Рикье для бигармонического уравнения в полуплоскости. // Общая теория граничных задач: Сб. науч. тр. К., 1983. С. 259. 2. Г о р б а й ч у к В.Й. Умови розв"язності задачі Рік"є для бігармонічного рівняння у півплощині і граничні властивості розв"язків // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1983. № 7. С.9-13. 3. Г у п а л о Г.С. Про узагальнену задачу Діріхле // Доп. АН УРСР. 1966. № 7. С.843-846. 4. *Bazański F. Rozwiazanie problemu Riquier w półpłaszyznie i w półprzestrzeni dla równania Biharmonicznego $\Delta^2 u=0$ // Prace Mat. 1964. №8. P. 239-251.*

Стаття надійшла до редколегії 06.04.87

УДК 517.956

Г.П. Лопушанська

ПРО ОДИН МЕТОД РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ПАРАБОЛІЧНОЇ ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО СПРЯЖЕННЯ

Метод побудови розв"язку параболічної задачі з нелінійними граничними умовами, запропонований у /2/, переносимо на задачу нелінійного спряження. Розв"язок загальної лінійної параболічної задачі спряження наявний у [1].

Нехай Ω_{01}, Ω_{02} – області в R^n, $\Omega_{01} \cap \Omega_{02} = \Omega_{11} = \partial\Omega_{01}$; $\partial\Omega_{02} = \Omega_{11} \cup \Omega_{12}$, Ω_{1i} – $n-1$ – вимірні поверхні класу $C^{1+\beta}$, $0 < \beta < 1$; $Q_{pi} = \Omega_{pi} \times (0, \infty)$, $Q^{\tau}_{pi} = \Omega_{pi} \times (0, \tau)$, $\tau > 0$, $p = 0,1$; $i = 1,2$;

$$Q_0 = \bar{Q}_{01} \cup Q_{02};$$

$$L_i\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \equiv \sum_{k,l=1}^{n} a^i_{kl}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{n} b^i_k(x,t)\frac{\partial}{\partial x_k} + c^i(x,t) - \frac{\partial}{\partial t} -$$

параболічні в $\bar{Q}_{0i}$ оператори з обмеженими і неперервними за Гельдером коефіцієнтами, $a^i_{11}(x,t) > K_1$, $b^i_1(x,t) > -K_2$, $c^i(x,t) < 0$ в Q_{0i}; K_1, K_2 – додатні константи.

Розглядаємо задачу

$$L_i u_i(x,t) = f_i(x,t),\ (x,t) \in Q_{0i},\ u_i \in C^2(Q_{0i}) \cap C^1(\bar{Q}_{0i}); \quad /1/$$

$$u_i(x,0) = \psi_i(x),\ x \in \Omega_{0i}; \quad /2/$$

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial \nu^2} = g(x,t,u_2(x,t),\varphi(x,t)),\ (x,t) \in Q_{12}; \quad /3/$$

$$u_1(x,t) = f(u_2(x,t)) + K(x,t)\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial \nu^2},\ (x,t) \in Q_{11}; \quad /4/$$

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial \nu^1} = \alpha(x,t)\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial \nu^2},\ (x,t) \in Q_{11}, \quad /5/$$

$u_i(x,t) > 0$ – обмежені в Q_{0i}, $i = 1,2$,
де $\partial/\partial\nu^i$ – внутрішня конормальна похідна для L_i; $f(u)$ – монотонно зростаюча неперервна функція; $f_i(x,t)$, $\psi_i(x)$, g, φ, $\alpha > 0$, $K > 0$ – задані неперервні функції, $\psi_i(x)$ мають компактні носії в Ω_{0i}, $i = 1,2$.

<u>Теорема 1.</u> Нехай функція $g(x,t,u,v)$ строго зростає по u і строго спадає по v, $f(u_1) - f(v_1) > f(u_2) - f(v_2)$, як тільки $u_1 - v_1 > u_2 - v_2$, поверхня Q_{11} має властивість строгої сферичності зсередини та ззовні [2]. Тоді для довільного $0 < \tau < \infty$ в Q^{τ}_0 існує не більше одного розв"язку задачі /1/–/5/.

<u>Доведення</u>. Нехай (u_1, u_2) і (v_1, v_2) – два розв"язки задачі в Q^{τ}_0. Припустимо, що у деякій точці $(x_i, t_i) \in Q^{\tau}_{0i}$ $u_i > v_i$. Тоді

$$g(x_i, t_i, u_i(x_i,t_i), \varphi(x_i,t_i)) > g(x_i, t_i, v_i(x_i,t_i), \varphi(x_i,t_i)). \quad /6/$$

Нехай $w_i(x,t)=u_i(x,t)-v_i(x,t)$, тоді $L_i w_i = 0$ в Q_{0i} і $w_i(x,0)=0$, $i=1,2$. Отже, додатного максимуму функції $w_1(x,t)$ можна досягати лише на Q_{11}, а функції $w_2(x,t)$ – на $Q_{11} \cup Q_{12}$. Якщо б $w_2(x,t)$ набувала його у деякій точці $(x_2^0, t_2^0) \in Q_{12}$, то $\partial w_2(x_2^0, t_2^0)/\partial\nu^2 \geq 0$, і отримуємо суперечність із /6/ і тим, що

$$\frac{\partial w_2(x,t)}{\partial \nu^2} = g(x,t,u_2(x,t),\psi(x,t)) - g(x,t,v_2(x,t),\psi(x,t)) \text{ на } Q_{12}.$$

Коли б функції $w_i(x,t)$ набували додатного максимуму в точках $(x_i^*, t_i^*) \in Q_{11}$, то за теоремою 14 із [2] $\frac{\partial w_1(x_1^*,t_1^*)}{\partial \nu^1} < 0$, $\frac{\partial w_2}{\partial \nu^2}(x_2^*, t_2^*) > 0$. Отже, приходимо до суперечності, якщо враховувати умови на Q_{11} для функцій $w_1(x,t)$ і $w_2(x,t)$ і властивості функції $f(u)$.

Теорема 2. Нехай виконуються умови теореми 1 і, крім цього, функція $g(x,t,u,v) \to \pm\infty$, коли $u \to \pm\infty$, рівномірно відносно $(x,t) \in Q_{1i}$ і v із обмежених множин. Тоді існує єдиний обмежений розв"язок задачі /1/-/5/.

Доведення. Нехай $Z_R = \{(v_1, v_2) : \sup\limits_{Q_{0i}^t} |v_i(x,t)| < R, \ i=1,2\}$.

Для кожної пари функцій $(v_1, v_2) \in Z_R$ визначимо пару (w_1, w_2), $w_i = T_i v_i$, що задовольняє /1/, /2/, /5/ і умови

$$\frac{\partial w_2(x,t)}{\partial \nu^2} = g(x,t,v_2(x,t),\psi(x,t)) \quad \text{на} \quad Q_{12}, \qquad /3'/$$

$$w_1(x,t) = f(v_2(x,t)) + \kappa(x,t)\frac{\partial w_2(x,t)}{\partial \nu^2} \quad \text{на} \quad Q_{11}. \qquad /4'/$$

Розв"язок шукаємо у вигляді

$$w_1(x,t) = \int_0^t \int_{\Omega_{11}} \Gamma_1(x,t;\xi,\tau) p_1(\xi,\tau) d\xi d\tau + G_1(x,t),$$

$$w_2(x,t) = \int_0^t \int_{\Omega_{12}} \Gamma_2(x,t;\xi,\tau)\mu(\xi,\tau) d\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Omega_{11}} \Gamma_2(x,t;\xi,\tau) p_2(\xi,\tau) d\xi d\tau + G_2(x,t),$$

де $\Gamma_i(x,t;\xi,\tau)$ – фундаментальні функції операторів L_i :
$G_i(x,t) = \int_{\Omega_{0i}} \Gamma_i(x,t;\xi,0)\psi_i(\xi) d\xi - \int_0^t \int_{\Omega_{0i}} \Gamma_i(x,t;\xi,\tau) f_i(\xi,\tau) d\xi d\tau$;
(μ, p_1, p_2) – розв"язок системи інтегральних рівнянь

$$
-\frac{1}{2}\mu(x,t)+\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_{12}}\frac{\partial\Gamma_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial\nu^2}\mu(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_{11}}\frac{\partial\Gamma_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial\nu^2}\rho_2(\xi,\tau)\times
$$

$$
\times d\xi d\tau-q(x,t,v_2(x,t),\psi(x,t))-\frac{\partial G_2(x,t)}{\partial\nu^2}, \qquad (x,t)\in Q_{12},
$$

$$
-\frac{1}{2}\rho_1(x,t)-\frac{\alpha(x,t)}{2}\rho_2(x,t)-\alpha(x,t)\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_{12}}\frac{\partial\Gamma_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial\nu^2}\mu(\xi,\tau)d\xi d\tau+
$$

$$
+\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_{11}}\frac{\partial\Gamma_1(x,t;\xi,\tau)}{\partial\nu^1}\rho_1(\xi,\tau)d\xi d\tau-\alpha(x,t)\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_{11}}\frac{\partial\Gamma_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial\nu^2}\rho_2(\xi,\tau)\times
$$

$$
\times d\xi d\tau-\alpha(x,t)\frac{\partial G_2(x,t)}{\partial\nu^2}-\frac{\partial G_1(x,t)}{\partial\nu^1}, \qquad (x,t)\in Q_{11},
$$

$$
-\frac{\kappa(x,t)}{2}\rho_2(x,t)-\kappa(x,t)\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_{12}}\frac{\partial\Gamma_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial\nu^2}\mu(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_{11}}\Gamma_1(x,t;\xi,\tau)\rho_1(\xi,\tau)\times
$$

$$
\times d\xi d\tau-\kappa(x,t)\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_{11}}\frac{\partial\Gamma_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial\nu^2}\rho_2(\xi,t)d\xi d\tau-f(v_2(x,t))-G_1(x,t)+
$$

$$
+\kappa(x,t)\frac{\partial G_2(x,t)}{\partial\nu^2}, \quad (x,t)\in Q_{11}.
$$

Цим же методом, яким доведена теорема 13 у [2], показуємо, що оператор (T_1, T_2) має нерухому точку (U_1, U_2). Її можна знайти, наприклад, методом послідовних наближень.

1. Дрінь М.М., Івасишин С.Д. Матриця Гріна загальної крайової задачі для параболічної за І.Г.Петровським системи з розривними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1984. № 11. С.7-10. 2. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.

Стаття надійшла до редколегії 09.03.87