УДК 519.21

Л.В.Білобрам, М.В.Заболоцький

ДОСТАТНІ УМОВИ ПОВІЛЬНОГО ЗРОСТАННЯ ВИПУКЛИХ ФУНКЦІЙ

Нехай L – клас повільно зростаючих функцій $l(x)$, тобто додатних, неспадних, необмежених, визначених на $[1, \infty[$, що задовольняють умову

$$l(2x) \sim l(x), \quad x \to \infty . \qquad /1/$$

При вивченні питань асимптотичної поведінки функцій $l \in L$, враховуючи теорему 1.2 з [2] і не зменшуючи загальності, вважатимемо, що функції класу L неперервно диференційовані.

Клас додатних функцій $\varphi(x)$, визначених на $[1, \infty[$, зображуваних у вигляді

$$\varphi(x) = \int_1^x \psi(t)\, d\ln_m t, \qquad /2/$$

де $\psi(t)$ – неспадна функція; $\ln_m t \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{m\text{-раз}} x,\ m \in N$, називаємо випуклими відносно $\ln_m x$ і позначаємо через H_m.

<u>Теорема 1.</u> Нехай $l_1, l_2 \in L,\ \varphi \in H_m$ і

$$l_1(x) \le \varphi(x) < l_2(x), \quad x \ge x_0 > 1. \qquad /3/$$

Якщо

$$l_2(x^2) = O(l_1(x)\ln x), \quad x \to \infty, \qquad /4/$$

тоді $\varphi \in L$.

<u>Доведення.</u> З /2/ одержуємо $\varphi(x^2) \ge \int_x^{x^2} \psi(t)\, d\ln_m t \ge$

$$\ge \frac{\psi(x)}{\ln_{m-1} x^2 \cdot \ldots \cdot \ln x^2} \int_x^{x^2} d\ln t \ge K_1 \psi(x)(\ln_{m-1} x \cdot \ldots \cdot \ln_2 x)^{-1},\ x \ge x_0,$$

де K_i – тут і надалі деякі додатні постійні; $i \in N$. Враховуючи останню нерівність, співвідношення /3/, /1/ і /4/, маємо

$$\varphi(x) \le \varphi(2x) \le \varphi(x) + \int_x^{2x} K_2 \varphi(t^2)/(\ln_{m-1} t \cdot \ldots \cdot \ln_2 t)\, d\ln_m t \le \varphi(x) +$$

$$+ K_2 \int_x^{2x} l_2(t^2)/\ln t\, d\ln t = K_3 l_2(4x^2)/\ln x + \varphi(x) \le \varphi(x)(K_4 l_2(x^2)/(l_1(x) \times$$

$\times \ln x)+1) = \psi(x)(1+o(1)),\ \ x \to \infty.$

Отже, $\psi \in H_m$.

<u>Наслідок</u>. Нехай $l \in L,\ l(x^2)=O(l(x)),\ x \to +\infty,\ \psi \in H_m$, ω - довільна функція, $\omega(x) \to \infty$, $x \to +\infty$. Якщо

$$\omega(x)\,l(x) \leqslant \psi(x) \leqslant l(x)\ln x, \quad x > x_0 > 1,$$

тоді $\psi \in L$.

Покажемо, що умову /4/, взагалі кажучи, поліпшити не можна, тобто побудуємо приклад функції $\Phi \in H_1$, $l_1(x) \leqslant \Phi(x) \leqslant l_2(x)$, $x \geqslant 1$, $l_1, l_2 \in L$, $\lim\limits_{x\to\infty} l_2(x^2)/(l_1(x)\ln x) > 0$, і $\Phi \bar{\in} L$.

Нехай (z_n) - послідовність додатних чисел така, що $z_1 = 1$, $z_{n+1}/z_n^{\ln z_n} \to \infty$, $n \to \infty$. Розглянемо рівняння

$$g(z) \overset{\text{def}}{=\!=} \ln^k z - \ln^k z_n (1+\ln(z/z_n)),$$

де $k \geqslant 2$, $k \in N$ - фіксоване число. Враховуючи $g(z_n) = 0$, $g(z_n^{\ln z_n}) > 0$, $g'(z) = (k\ln^{k-1} z - \ln^k z_n)\,z^{-1}$, одержуємо, що існує єдина точка z_n^*, $z_n < z_n^* < z_n^{\ln z_n} < z_{n+1}$, така що $g(z_n^*) = 0$. У випадку $z \in]z_n, z_n^*[$ маємо $g(z) < 0$. Приймемо $\Phi(z) = \ln z_1^*$ при $z \in [1, z_1^*]$ і для $n \geqslant 2$

$$\Phi(z) = \begin{cases} \ln^k z, & z_{n-1}^* \leqslant z \leqslant z_n, \\ \ln^k z_n (1+\ln(z/z_n)), & z_n < z < z_n^*. \end{cases}$$

При $z \in [z_n, z_n^*]$ функція $G(z) \overset{\text{def}}{=\!=} \ln^{k+1} z - \Phi(z)$ задовольняє умови $G'(z) = z^{-1}((k+1)\ln^k z - \ln^k z_n) \geqslant 0$, $G(z_n) > 0$, отже, $G(z) > 0$, тобто $\Phi(z) < \ln^{k+1} z$. З іншого боку, для цих же z маємо $\Phi(z) = \ln^k z - g(z) \geqslant \ln^k z$.

Таким чином, $l(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \ln^k x \leqslant \Phi(x) \leqslant l(x)\cdot\ln x$, $x \geqslant 1$, /порівняй з наслідком теореми 1/ і $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(2z_n)/\Phi(z_n) = 1+\ln 2$, тобто $\Phi \bar{\in} L$.

Нехай $\psi \in H_m$, $l \in L$, $A, B \in \mathbb{R}$, $0 < A < B < \infty$,

$$A\,l(x) \leqslant \psi(x) \leqslant B\,l(x), \quad x > x_0 > 1. \qquad /5/$$

З теореми 1 добре видно, що коли

$$l(x^2) = o(l(x)\ln x), \quad x \to \infty, \qquad /6/$$

то $\psi \in L$. Виявляється, що останнє твердження справедливе і без умови /6/.

Теорема 2. Нехай $\psi \in H_m$, $l \in L$, $0 < A < B < \infty$ та виконується умова /5/. Тоді $\psi \in L$.

Доведення. Нехай $l_0(x) = \inf\{l(t)/(l'(t)\cdot t):\ x < t < \infty\}$. Легко побачити, що $l_0(x) \to +\infty$, $x \to \infty$. Відомо [1, лема 3], що

$$l(x \exp l_0(x)) \leq e l(x).$$

За теоремою Лагранжа про середнє маємо $(x \geq x_0)$

$$\psi(x\cdot \exp l_0(x)) - \psi(x) \geq \psi'_{\ln_m x}(x)(\ln_m(x \exp l_0(x)) - \ln_m x) \geq \psi'_{\ln_m x}(x) K_5\, l_0(x)(\ln_{m-1} x \cdot \ln_{m-2} x \cdot \ldots \cdot \ln x)^{-1}.$$

Тоді

$$0 < \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x) - \psi(x/2)}{\psi(x/2)} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\psi'_{\ln_m x}(x)(\ln_m x - \ln_m(x/2))}{\psi(x/2)} \leq$$

$$\leq \lim_{x\to\infty} K_6 \frac{\psi(x \exp l_0(x)) \ln_{m-1} x \cdot \ldots \cdot \ln x}{\psi(x/2)\, l_0(x) \ln_{m-1}(x/2) \cdot \ldots \cdot \ln(x/2)} \leq$$

$$\leq \frac{BeK_7}{A} \lim_{x\to\infty} \frac{l(x)}{l(x/2)\, l_0(x)} = 0,$$

тобто $\psi \in L$.

1. Братищев А.В., Коробейник Ю.Ф. О некоторых характеристиках роста субгармонических функций // Мат. сб. 1978. Т. 108. № 1. С. 44-65. 2. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М., 1985.

Стаття надійшла до редколегії 23.02.87

УДК 517.948

М.Й.Михалюк

ПРО ЄДИНІСТЬ РОЗВ"ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ В ОДНОМУ КЛАСІ ПОТЕНЦІАЛІВ ДЛЯ ПОСТІЙНОЇ ГУСТИНИ

Обернена задача логарифмічного потенціалу полягає у відшуканні плоскої однозв"язної області D, при заповненні якої речовиною зі сталою густиною σ породжується заданий зовнішній потенціал $V_e(x, y)$.