Теорема 2. Нехай $\psi \in H_m$, $l \in L$, $0 < A < B < \infty$ та виконується умова /5/. Тоді $\psi \in L$.

Доведення. Нехай $l_0(x) = \inf\{l(t)/(l'(t)\cdot t):\ x < t < \infty\}$. Легко побачити, що $l_0(x) \to +\infty$, $x \to \infty$. Відомо [1, лема 3], що

$$l(x \exp l_0(x)) \leq e l(x).$$

За теоремою Лагранжа про середнє маємо $(x \geq x_0)$

$$\psi(x \cdot \exp l_0(x)) - \psi(x) \geq \psi'_{\ln_m x}(x)(\ln_m(x \exp l_0(x)) - \ln_m x) \geq \psi'_{\ln_m x}(x) K_5\, l_0(x)(\ln_{m-1} x \cdot \ln_{m-2} x \cdot \ldots \cdot \ln x)^{-1}.$$

Тоді

$$0 < \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x) - \psi(x/2)}{\psi(x/2)} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\psi'_{\ln_m x}(x)(\ln_m x - \ln_m(x/2))}{\psi(x/2)} \leq$$

$$\leq \lim_{x\to\infty} K_6 \frac{\psi(x \exp l_0(x)) \ln_{m-1} x \cdot \ldots \cdot \ln x}{\psi(x/2)\, l_0(x) \ln_{m-1}(x/2) \cdot \ldots \cdot \ln(x/2)} \leq$$

$$\leq \frac{BeK_7}{A} \lim_{x\to\infty} \frac{l(x)}{l(x/2)\, l_0(x)} = 0,$$

тобто $\psi \in L$.

1. Братищев А.В., Коробейник Ю.Ф. О некоторых характеристиках роста субгармонических функций // Мат. сб. 1978. Т. 108. № 1. С. 44-65. 2. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М., 1985.

Стаття надійшла до редколегії 23.02.87

УДК 517.948

М.Й.Михалюк

ПРО ЄДИНІСТЬ РОЗВ"ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ В ОДНОМУ КЛАСІ ПОТЕНЦІАЛІВ ДЛЯ ПОСТІЙНОЇ ГУСТИНИ

Обернена задача логарифмічного потенціалу полягає у відшуканні плоскої однозв"язної області D, при заповненні якої речовиною зі сталою густиною σ породжується заданий зовнішній потенціал $V_e(x, y)$.

Введемо допоміжну функцію $z = z(t)$, яка відображає конформно круг $|t|<1$ комплексної площини t на область D площини $z = x + iy$, що містить початок координат, причому $z(0) = 0$, $z'(0) > 0$. Функцію $z = z(t)$ назвемо розв"язком оберненої задачі для зовнішнього потенціалу $V_e(x,y)$ і густини σ.

Обернена задача логарифмічного потенціалу зводиться до розв"язку нелінійного інтегрального рівняння

$$\sigma z_*(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int \frac{U_e(z(\tau))d\tau}{\tau - t}, \quad |t|>1, \qquad /1/$$

де

$$z_*(t) = z(1/\bar{t}); \; U_e(z) = -(2/\pi)(\partial V_e/\partial z);$$
$$z(t) = \delta_1 t + \delta_2 t^2 + \delta_3 t^3 + \cdots, \quad \delta_1 > 0. \qquad /2/$$

Відомо, що коли густина розподіду мас $\sigma = 1$ і $U_e(z) = (1/z)$, то розв"язком оберненої задачі потенціалу є круг радіуса 1 з центром у початку координат.

Розглянемо випадок, коли

$$U_e(z) = (1/z) + (a/z^3), \qquad /3/$$

$$U_e(z) = (1/z) + (b/z^4), \qquad /4/$$

$$U_e(z) = (1/z) + (c/z^5), \qquad /5/$$

де a, b, c – комплексні числа; $\sigma = 1$.

Підставляючи /3/-/4/, /2/ в /1/, отримуємо нелінійні системи рівнянь:

$$\begin{cases} \delta_1 = \dfrac{1}{\delta_1} - \dfrac{3a\delta_3}{\delta_1^4}, \\ \bar{\delta}_3 = \dfrac{a}{\delta_1^3}, \\ \delta_2 = \delta_4 = \delta_5 = \ldots = 0; \end{cases} \qquad /3'/$$

$$\begin{cases} \delta_1 = (1/\delta_1) - (4b\delta_4/\delta_1^5), \\ \bar{\delta}_4 = b/\delta_1^4, \\ \delta_2 = \delta_3 = \delta_5 = \ldots = 0; \end{cases} \qquad /4'/$$

$$\begin{cases} \delta_1 = \dfrac{1}{\delta_1} - \dfrac{5c\delta_5}{\delta_1^6}, \\ \bar{\delta}_5 = \dfrac{c}{\delta_1^5}, \\ \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \delta_6 = \ldots = 0. \end{cases} \qquad /5'/$$

Системи /3'/–/5'/ мають єдиний розв"язок (δ_1, δ_3), (δ_1, δ_4), (δ_1, δ_5) відповідно при

$$|a|^2 \leqslant \frac{3^2}{4^4}, \quad |b|^2 \leqslant \frac{4^3}{5^5}, \quad |c|^2 \leqslant \frac{5^4}{6^6}, \qquad /6/$$

які задовольняють умову

$$z'(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad |t| < 1.$$

Таким чином, справедлива така теорема.

<u>Теорема</u>. Для потенціалів /3/–/5/, які задовольняють умову /6/, обернена задача для постійної густини $\sigma = 1$ має єдиний розв"язок у класі однозв"язних областей. При

$$|a|^2 > \frac{3^2}{4^4}, \quad |b|^2 > \frac{4^3}{5^5}, \quad |c|^2 > \frac{5^4}{6^6}$$

задача в цьому класі областей розв"язку не має.

<u>Приклад</u>. Для потенціалів /3/–/5/ при

$$a = \sqrt{\frac{3^2}{4^4}}, \quad b = \sqrt{\frac{4^3}{5^5}}, \; c = \sqrt{\frac{5^4}{6^6}}, \quad \sigma = 1$$

єдиними розв"язками у класі конформних відображень є відповідно функції

$$z_1(t)=\sqrt{3/4}\,t+(1/\sqrt{12})t^3, \quad |t|<1,$$

$$z_2(t)=\sqrt{4/5}\,t+(1/\sqrt{20})t^4, \quad |t|<1,$$

$$z_3(t)=\sqrt{5/6}\,t+(1/\sqrt{30})t^5, \quad |t|<1.$$

Стаття надійшла до редколегії 23.02.87

УДК 515.12

М.М.Зарічний

ФУНКТОРИ В КАТЕГОРІЇ КОМПАКТІВ, ЩО ЗБЕРІГАЮТЬ ОДНОРІДНІСТЬ

Розглянемо таку задачу: коли нормальний функтор $F: Comp \to Comp$ зберігає клас топологічно однорідних просторів? Зауважимо, що всі поняття, які ми використовуємо, наявні у праці [3]. Розв"язок цієї задачі для функторів скінченного степеня дає така теорема.

<u>Теорема</u>. Нехай $F: Comp \to Comp$ – нормальний функтор скінченного степеня $n \geq 1$, для якого простір $F(I^\tau)$ топологічно однорідний при деякому $\tau \geq \omega_2$. Тоді функтор F ізоморфний степеневому функтору $(-)^n$.

Тут необхідне допоміжне твердження.

<u>Лема</u>. Нехай K, L – метризовні компакти, $\tau \geq \omega_2$ і $h: F(K^\tau) \to F(L^\tau)$ – гомеоморфізм. Тоді для будь-якого $x \in F(K^\tau)$ існує ізоморфізм діаграм $H: F(\pi^3(K^\omega)) \to F(\pi^3(L^\omega))$, утворений гомеоморфізмами $h_1: F(K^\omega) \to F(L^\omega)$, $h_{1j}: F(K^\omega \times K^\omega) \to F(L^\omega \times L^\omega)$, $j=2,3$, $h_{123}: F(K^\omega \times K^\omega \times K^\omega) \to F(L^\omega \times L^\omega \times L^\omega)$, для якого існує точка $\bar{x} \in F(K^\omega)$, що задовольняє умови $\deg(x)=\deg(\bar{x})$, $\deg h(x) = \deg h_1(\bar{x})$.

Доведення проводиться аналогічно лемі 1 з праці [2].

Переходимо до доведення теореми. Припустимо, що $F(I^\tau)$, $\tau \geq \omega_2$, однорідний компакт. Нехай $h: F(I^\tau) \to F(I^\tau)$ – гомеоморфізм, що переводить точку $x \in F(I^\tau)$, для якої $\deg(x)=n$, в точку $y=h(x)$, для якої $\deg(y)=1$. Нехай $H=\{h_1, h_{12}, h_{13}, h_{123}\}$ – автоморфізм діаграми $F(\pi^3(I^\omega))$, для якого існує точка $\bar{x} \in F(I^\omega)$ така, що $\deg(\bar{x})=\deg(x)=n$ і $\deg(h_1(x)) = \deg(y)=1$.