1. З а р и ч н ы й М.М. Мультипликативный нормальный функтор - степенной // Мат. заметки. 1987. Т.41. № 1. С.93-100.
2. С м у р о в М.В. О топологической неоднородности пространства типа $exp K^{\tau}$ // Докл. АН СССР. 1980. Т.255. № 3. С.526-531.
3. Щ е п и н Е.В. Функторы и несчетные степени компактов // Успехи мат. наук. 1981. Т.36. С.3-62.

Стаття надійшла до редколегії 08.04.86

УДК 519.71

О.Д.Артемович

ГЛОБАЛЬНА РЕАКЦІЯ ГРУПОВИХ СИСТЕМ

Загальною системою називається відношення S на непорожніх множинах X і Y [2], тобто $S \subset X \times Y$, де $\times$ - символ декартового добутку.

Якщо S - система, C - довільна множина і функція $R : C \times X \longrightarrow Y$ - така, що

$$(x, y) \in S \Longleftrightarrow ((\exists c \in C)[\, y = R(c, x)],$$

то C називається об"єктом глобальних станів системи, елементи множини C - глобальними станами системи, а функція R - глобальною реакцією системи S. Функція R може бути і частковою. Проте теорема 1.1 із [2] твердить, що кожній системі S відповідає деяка глобальна реакція R, визначена для кожного елемента з множини $C \times X$.

Надалі, як і в [2], R називатимемо глобальною реакцією лише тоді, коли функція R визначена для кожного елемента із множини $C \times X$. Зауважимо також, що всі позначення і терміни, які ми використовуємо без пояснень, можна знайти в [1, 2]; зокрема, через $D(F)$ позначаємо область визначення функції F.

<u>Означення 1.</u> Нехай X - вільна абелева група, Y - абелева група, S - відношення, $S \subset X \times Y$, причому $S \neq \emptyset$. Якщо a, b - будь-які елементи із S і $a \cdot b \in S$, де через $\cdot$ позначено операцію абелевої групи $X \times Y$, то S називаємо <u>груповою</u> системою.

Наявна така теорема.

<u>Теорема 1.</u> Нехай X - вільна абелева група, Y - абелева група. Тоді система S групова в тому і лише в тому випадку, коли знайдеться така глобальна реакція $R : C \times X \longrightarrow Y$,

що:

1/ C - абелева група;

2/ існує пара таких гомоморфізмів $R_1: C \to Y$, $R_2: X \to Y$, коли для всіх $(c, x) \in C \times X$

$$R(c, x) = R_1(c) R_2(x).$$

<u>Доведення</u>. Достатність. Припустимо, що для системи S знайдеться така глобальна реакція $R: C \times X \to Y$, що:

1/ C - абелева група;

2/ існує пара таких гомоморфізмів $R_1: C \to Y$ і $R_2: X \to Y$, коли для всіх $(c, x) \in C \times X$ $R(c, x) = R_1(c) R_2(x)$. Нехай $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ - два будь-які елементи з S. Тоді, оскільки

$$(x_1, y_1) \in S \Longleftrightarrow (\exists c_1 \in C)[y_1 = R(c_1, x_1)],$$

і $$(x_2, y_2) \in S \Longleftrightarrow (\exists c_2 \in C)[y_2 = R(c_2, x_2)].$$

$$y_1 y_2 = R(c_1, x_1) R(c_2, x_2) = R_1(c_1) R_2(x_1) R_1(c_2) R_2(x_2) = R_1(c_1) R_1(c_2) \times$$

$$\times R_2(x_1) R_2(x_2) = R_1(c_1 c_2) R_2(x_1 x_2) = R(c_1 c_2, x_1 x_2),$$

то $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2) \in S$.
Отже, S - групова система.

Н е о б х і д н і с т ь . Спочатку потрібно встановити існування такого відображення $R_2: X \to Y$, що

$$\{(x, R_2(x)) \mid x \in X\} \subset S.$$

Нехай X_S - деяка підгрупа в X, а $L_S: X_S \to Y$ - такий гомоморфізм, що $\{(x, L_S(x)) \mid x \in X_S\} \subset S$.
Покажемо, що вибрані таким чином X_S і L_S існують завжди. Нехай $(\bar{x}, \bar{y}) \in S \neq \varnothing$, тоді приймемо $X_S = \{\bar{x}^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $L_S: X_S \to Y$, причому $L_S(\bar{x}^k) = \bar{y}^k$. Якщо $X_S = X$, то L_S - шуканий гомоморфізм. Коли ж $X_S \neq X$, то L_S, користуючись лемою Цорна, можна продовжити так, що $X_S = X$. Справді, нехай $L' = \{L_\nu\}$ - клас усяких гомоморфізмів, визначених на підгрупах групи X і таких, що коли підгрупа X_ν - це область визначення відображення L_ν, то $\{(x, L_\nu(x)) \mid x \in X_\nu\} \subset S$.
Тоді, очевидно, $L' \neq \varnothing$. Визначимо на L' відношення часткового порядку $\leqslant$ наступним чином. Якщо $L_{\nu_1}, L_{\nu_2} \in L'$, то $L_{\nu_1} \leqslant L_{\nu_2}$

тоді і лише тоді, коли $L_{\nu_1} \subseteq L_{\nu_2}$. Зрозуміло, що відношення $\leqslant$ коректно визначене. Тепер, коли M - будь-яка лінійно впорядкована /віднос о $\leqslant$ / підмножина із L' і $L_0 \in UM$, де UM - об"єднання елементів із множини M, то $L_0 \in L'$. Доведемо це.

Нехай $(x, y), (x, y_1)$ - довільні елементи із L_0. Тоді знайдуться два такі відображення L_1, L_2 із M, що

$$L_1(x) = y, \qquad L_2(x) = y_1.$$

А оскільки множина M лінійно впорядкована і, як наслідок, наприклад, $L_1 \leqslant L_2$, то $L_2(x) = y$. Звідси, враховуючи, що L_2 - відображення, маємо $y = y_1$ і, отже, L_0 - це теж відображення. Аналогічно, коли $L_0(x_1) = y_1$, $L_0(x_2) = y_2$, то знайдеться таке відображення $L_3 \in M$, що $L_3(x_1) = y_1$, $L_3(x_2) = y_2$. Крім того, оскільки L_3 - гомоморфізм, то $L_3(x_1 x_2) = y_1 y_2$, а отже, $L_0(x_1 x_2) = y_1 y_2$. Це означає, що L_0 - гомоморфізм.

Далі, якщо $L_0(x_1) = y_1$, то $L_3(x_1) = y_1$ для деякого $L_3 \in M$, а отже, $(x_1, y_1) \in S$ або, іншими словами, $L_0 \subset S$. Тому $L_0 \in L'$ і внаслідок леми Цорна в L' знайдеться хоча б один максимальний елемент; позначимо його через R_2.

Покажемо, що $D(R_2) = X$. Справді, якщо $D(R_2)$ власна підгрупа в X, то деякий елемент $\bar{x} \in X$ лежить поза підгрупою $D(R_2)$, а тому $X_1 = <\bar{x}^k x \mid x \in D(R_2)>$ - така підгрупа групи X, що містить власну підгрупу $D(R_2)$. Нехай γ - таке мінімальне невід"ємне ціле число, що $\bar{x}^\gamma \in D(R_2)$.
Тоді кожен елемент $z \in X_1 - X$ однозначно записується у вигляді $\bar{x}^k x$ для деяких $x \in D(R_2)$, $k \in \mathbb{Z}$, причому $k < \gamma$. Дійсно, коли $z = \bar{x}^k x_1 = \bar{x}^t x_2$, де k, t - різні цілі числа /можна вважати, що $k > 0$, $t > 0$), $k < \gamma$, $t < \gamma$ і, наприклад, $k > t$, а $x_1, x_2 \in D(R_2)$, то $\bar{x}^{k-t} \in D(R_2)$, причому $k - t < \gamma$. Звідси, зважаючи на мінімальний вибір γ, $k = t$. Визначимо тепер відображення $L_4 : X_1 \to Y$ так, щоб $L_4(\bar{x}^k x) = \bar{y}^k R_2(x)$, де $(\bar{x}, \bar{y}) \in S$; $x \in D(R_2)$.
Тоді, очевидно, L_4 - гомоморфізм і

$$\{(z, L_4(z)) \mid z \in X_1\} \subset S,$$

R_2 власним чином міститься в L_4, а це суперечить максимальному вибору $R_2 \in L'$. Звідси випливає, що $D(R_2) = X$ і R_2 - шуканий гомоморфізм.

Приймемо $C=\{(e,y)/(e,y)\in S\}$, де e – нейтральний елемент групи X. Очевидно, C – абелева група, якщо операцію визначити таким чином:

$$(e,y)(e,y')=(e,yy') \quad , \text{ де } y,y'\in Y.$$

Нехай $R_1: C\to Y$ – таке відображення, що $R_1((e,y))=y$. Тоді, очевидно, R_1 – гомоморфізм. Позначимо $R(c,x)=R_1(c)R_2(x)$. Покажемо, що $S=S'$, де $S=\{(x,y)/(\exists c\in C)[y=R(c,x)]\}$. Припустимо $(x,y)\in S$. Тоді $(x,R_2(x))\in S'$, а оскільки S – групова система, то

$$(x,y)(x,R_2(x))^{-1}=(e,y(R_2(x))^{-1})\in S.$$

Тому знайдеться такий елемент $c\in C$, що $y=R_1(c)R_2(x)$, тобто $S\subseteq S'$. Навпаки, припустимо $(x,R_1(c)R_2(x))\in S'$. Тоді, враховуючи, що $(e,R_1(c))\in S$, $(x,R_2(x))\in S$ і система S – групова, одержуємо

$$(x,R_2(x))\cdot(e,R_1(c))=(x,R_1(c)R_2(x))\in S.$$

Отже, $S'\subseteq S$ і, таким чином, $S'=S$. Теорема доведена.

Означення 2. Нехай $S\subset X\times Y$ – групова система, а $R: C\times X\to Y$ – відображення. Тоді R називається груповою глобальною реакцією в тому і лише в тому випадку, коли:

1/ C – абелева група;

2/ відображення R узгоджується із системою S, тобто

$$(x,y)\in S \Longleftrightarrow (\exists c\in C)\ [y=R(c,x)];$$

3/ існує два таких гомоморфізми $R_1: C\to Y$, $R_2: X\to Y$, що для довільних $(c,x)\in C\times X$ $R(c,x)=R_1(c)R_2(x)$.

У випадку групової системи S за аналогії з [2] називаємо: C – групою глобальних станів системи S; гомоморфізм $R_1: C\to Y$ – глобальною реакцією на стан, а гомоморфізм $R_2: X\to Y$ – глобальною реакцією на вхід.

Тепер із теореми 1 випливає така теорема.

Теорема 1*. Система S групова тоді і лише тоді коли для неї існує групова глобальна реакція R.

1. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. М., 1974. 2. Месарович М., Такахара Я. Общая теория систем. Математические основы. М., 1978.

Стаття надійшла до редколегії 23.03.87