

ЄДИНІСТЬ УНІТАЛЬНИХ ДІЛЬНИКІВ
МАТРИЧНОГО МНОГОЧЛЕНА

Нехай $A(x)$ – неособлива поліноміальна $n \times n$ -матриця з елементами із $\mathbb{C}[x]$, яку запишемо у вигляді матричного многочлена

$$A(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m. \quad /1/$$

Відомо [1], для $A(x)$ існують такі оборотні над $\mathbb{C}[x]$ матриці $P(x)$ і $Q(x)$, що

$$P(x)A(x)Q(x) = \text{diag}(\varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_n(x)), \quad /2/$$

де $\varepsilon_i | \varepsilon_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Матрицю $\text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ називають формою Сміта матричного многочлена $A(x)$.

У праці [4] знайдені необхідні та достатні умови зображення матричного многочлена /1/ у вигляді

$$A(x) = B(x)C(x), \quad /3/$$

де $B(x) = E x^z + B_1 x^{z-1} + \dots + B_z$ (E – одинична матриця n -го порядку) – унітальний матричний многочлен степеня z ($0 < z < m$) з формою Сміта $\text{diag}(\psi_1, \dots, \psi_n)$. Необхідною умовою такого зображення є $\psi_k | \varepsilon_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ [4].

Використовуючи властивості матриці значення поліноміальної матриці на системі коренів многочлена $M_{C(x)}(\psi)$ /II/ означення і властивості наведені у [4]/, на основі теореми 1. 3 праці [4] одержуємо такі теореми.

Теорема 1. Матричний многочлен /1/ зображається у вигляді /3/ тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\text{за } \text{за } \text{за } M_{V(x)P(x)} \|E, E x, \dots, E x^{z-1}\| (\psi_n) = n z,$$

де

$$V(x) = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{\psi_n}{\psi_1} & & & 0 \\ \frac{\psi_n k_{21}}{(\psi_2, \varepsilon_1)} & \frac{\psi_n}{\psi_2} & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ \frac{\psi_n k_{n1}}{(\psi_n, \varepsilon_1)} & \frac{\psi_n k_{n2}}{(\psi_n, \varepsilon_2)} & \dots & \frac{\psi_n k_{n, n-1}}{(\psi_n, \varepsilon_{n-1})} \end{array} \right\| \quad 1$$

(ψ_i, ε_j) - найбільший спільний дільник многочленів ψ_i і ε_j ,
 $P(x)$ - довільна оборотна матриця зі співвідношення /2/,

$$k_{ij} = \begin{cases} 0 & , \text{ якщо } (\psi_i, \varepsilon_j) = \psi_j, \\ k_{ij0} + k_{ij1}x + \dots + k_{ijn_{ij}}x^{n_{ij}} & , \text{ якщо } (\psi_i, \varepsilon_j) \neq \psi_j; \end{cases}$$

$$n_{ij} = \deg \frac{(\psi_i, \varepsilon_j)}{\psi_j} - 1, \quad i = 2, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

$i > j$; k_{ijs} - попарно різні змінні величини, приєднані до поля $\mathbb{C}$, $s = 0, 1, \dots, n_{ij}$.

Зауваження. В умовах теореми і коефіцієнти унітального дільника $B(x) = Ex^z - B_1x^{z-1} - \dots - B_z$ можна знайти як розв'язки $X_1 = B_1, \dots, X_z = B_z$ лінійного матричного рівняння.

$$M_{F_{z-1}(x)}(\psi_n) \begin{pmatrix} X_z \\ \vdots \\ X_1 \end{pmatrix} = M_{V(x)P(x)x^z}(\psi_n),$$

/4/

де $F_{z-1}(x) = V(x)P(x) \| E, Ex, \dots, Ex^{z-1} \|$.

Дослідимо тепер питання про єдиність унітального многочлена $B(x)$.

Теорема 2. У зображенні матричного многочлена /1/ у вигляді /3/ унітальний множник $B(x)$ єдиний з формою Сміта $\text{diag}(\psi_1, \dots, \psi_n)$ тоді і тільки тоді, коли $(\psi_i, \varepsilon_j) = \psi_j$ для всіх $i > j$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n-1$.

Доведення. Н е о б х і д н і с т ь . Нехай $A(x) = B(x)C(x)$, причому $(\psi_i, \varepsilon_j) \neq \psi_j$ хоча б для однієї пари i та j . Тоді в матриці $V(x)$ хоча б одна змінна k_{ijs} не дорівнює нулю. Згідно зі зробленим вище зауваженням коефіцієнти множника $B(x)$, знайдені як розв'язки лінійного матричного рівняння /4/, також залежать від цієї змінної, яка може приймати нескінченну множину допустимих значень із поля $\mathbb{C}$. Таким чином, матричний многочлен /1/ має нескінченну множину унітальних дільників з формою Сміта $\text{diag}(\psi_1, \dots, \psi_n)$.

Достатність. Нехай матричний многочлен /1/ зображається у вигляді /3/, причому його форма Сміта відповідно факторизується так:

$$\text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \text{diag}(\psi_1, \dots, \psi_n) \text{diag}(\psi_1, \dots, \psi_n).$$

Оскільки $(\psi_i, \varepsilon_j) = \psi_i$, то $((\psi_i/\psi_j), \psi_j) = 1$. Тоді існують такі $f, g \in \mathbb{C}[x]$, що $(\psi_i/\psi_j)f + \psi_j g = 1$. Звідси одержуємо рівність

$$(\psi_i \psi_i / \psi_j) f + \psi_i \psi_j g = \psi_i,$$

з якої

$$(\psi_i / \psi_j) = (\varepsilon_i / \varepsilon_j) f + \psi_i g,$$

тобто $(\psi_i / \psi_j) \in \mathbb{C}[x]$. Отже, матриця $\text{diag}(\psi_1, \dots, \psi_n)$ є формою Сміта правого дільника $C(x)$, тобто при умові $(\psi_i, \varepsilon_j) = \psi_i$ форма Сміта матричного многочлена /1/ дорівнює добутку форм Сміта його дільників. Згідно з теоремою 5 із праці [3] унітальний множник $B(x)$ – єдиний із форм Сміта $\text{diag}(\psi_1, \dots, \psi_n)$.

Наслідок. Якщо матричний многочлен має унітальний дільник із заданою формою Сміта, то він або єдиний з цієї формою Сміта, або таких дільників в нього нескінченна кількість.

Зауважимо, що теорема 2 узагальнює результат праці [2] про виділення унітального дільника зі заданим характеристичним многочленом.

Згідно з узагальненою теоремою Безу [1], якщо матричний многочлен /1/ зображається у вигляді $A(x) = (Ex - B)C(x)$, то матриця B є розв'язком матричного рівняння

$$X^m A_0 + X^{m-1} A_1 + \dots + A_m = 0. \quad /5/$$

Тому, використовуючи теореми 1 і 2, можна виявити, чи має матричне рівняння /5/ єдиний із наперед заданою жордановою формою розв'язок. Якщо /5/ має розв'язок, що не єдиний із заданою жордановою формою, то рівняння /5/ володіє нескінченною множиною таких розв'язків.

1. Г а н т м а х е р Ф.Р. Теория матриц. М., 1966. 2. Г р и г а Б.С., К а з и м и р с к и й П.С. К вопросу о единственности выделения унитарного множителя из матричного многочлена // Теорет. и прикладные вопросы алгебры и диф. уравнений. К., 1976. С. 15-18. 3. З е л и с к о В.Р. Вопросы факторизации матричных многочленов // Мат. методы и физ.-мат. поля. 1983. Вып. 17. С. 23-33. 4. К а з і м і р с ь к и й П.С. Розклад матричних многочленів на множники. К., 1981.

Стаття надійшла до редколегії 23.03.87