УДК 512.552.12

М. Я. Комарницький, Б. В. Забавський

ПРО АДЕКВАТНІ КІЛЬЦЯ

Адекватні кільця вперше розглянуто в [2]. Ми продовжуємо їх вивчення з допомогою поняття адекватного елемента. Наш основний результат стверджує, що комутативна область Безу адекватна тоді і тільки тоді, коли довільний її ненульовий простий ідеал містить хоча б один адекватний елемент. Для доведення цього твердження необхідно нагадати деякі означення і факти з [4].

Комутативне кільце з $1 \neq 0$ називається кільцем Безу, якщо для будь-яких елементів $a, b \in R$ ідеали $aR + bR$ і $aR \cap bR$ є головними. Очевидно, що в кільці Безу довільний скінченно-породжений ідеал є головним. Якщо R -область цілісності, то друга умова - це наслідок першої [1]. Під кільцем розумітимемо комутативне кільце з $1 \neq 0$. Назвемо ненульовий елемент a кільця R адекватним, якщо для кожного елемента $b \in R$ знайдуться такі елементи $r, s \in R$, що: 1/ $a = r \cdot s$; 2/ $rR + bR = R$; 3/ для будь-якого $s' \in R$ з включення $sR \subset s'R \neq R$ випливає, що ідеал $s'R + bR$ властивий. Кільце, в якому кожний ненульовий елемент адекватний, називається адекватним. Легко переконатися, що прикладом адекватних елементів можуть бути одиниці кільця або атоми кільця.

Назвемо властивий ідеал кільця адекватним, якщо він містить хоча б один адекватний елемент. Позначимо через H множину всіх неадекватних властивих ідеалів кільця R. Оскільки $0 \in H$, то множина H непорожня. Нехай $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ - довільний ланцюг ідеалів з множини H. Розглянемо ідеал $I = \bigcup I_\alpha$. Якщо $I \notin H$, то існує адекватний елемент $a \in I$ $\alpha \in \Omega$. Отже, наявний такий індекс $\beta \in \Omega$, що $a \in I_\beta$. Таким чином, I_β - адекватний ідеал. Останнє суперечить припущенню $I_\beta \in H$, і тому $I \in H$. Ми виявили, що множина H індукована. За лемою Цорна в H існує хоча б один максимальний елемент. Такий ідеал $I \in H$ називатимемо максимально неадекватним. Отже, справедливий такий результат.

<u>Твердження 1.</u> Довільний неадекватний ідеал міститься хоча б в одному максимально неадекватному ідеалі.

Позначимо через $A(R)$ множину всіх адекватних елементів кільця R.

Твердження 2. Кожний максимально неадекватний ідеал P кільця R є простим ідеалом.

Доведення. Поведемо його від супротивного. Нехай існують такі елементи $a, b \in R \setminus P$, що $a \cdot b \in P$. Розглянемо ідеал $P + aR$. Оскільки $a \notin P$ і P – максимально неадекватний ідеал, то існує такий елемент $c \in A(R)$, що $c \in P + aR$. Розглянемо ідеал $J = \{x / cx \in P\}$. Очевидно, що $P \subset J$, причому $J \neq P$, оскільки $b \in J$ і $b \notin P$. Отже, існує такий елемент $d \in A(R)$, що $d \in J$. Беручи до уваги визначення ідеалу J, бачимо $c \cdot d \in P$, тобто ідеал P містить добуток двох адекватних елементів. Переконаємся, що $c \cdot d$ – адекватний елемент.

Нехай k – довільний елемент кільця R. Тоді існують такі елементи $r, m, t, l \in R$, для яких $c = r \cdot m$, $d = t \cdot l$, $rR + kR = R$, причому для будь-яких m', l' з включення $mR \subseteq m'R \neq R$, $lR \subseteq l'R \neq R$ випливають співвідношення $m'R + kR \neq R$, $l'R + kR \neq R$. Таким чином, $rtR + kR = R$ і для будь-якого $n' \in R$ з умови $mlR \subseteq n'R \neq R$ отримуємо $mlR + n'R \subseteq (mR + nR)(lR + nR) \neq R$. Тому $mlR + n'R \neq R$. Отже, $c \cdot d \in A(R)$. Ми довели, що ідеал P містить деякий адекватний елемент, а це суперечить висловленому на початку доведення припущенню. Твердження доведено.

Надалі через R позначатимемо комутативну область Безу. Доведемо, що в області R будь-який дільник адекватного елемента адекватний. Нехай $a \in A(R)$ і $a = d \cdot x$, $x \in R$, $d \in R$. Тоді для будь-якого елемента $c \in R$ існують такі $r, m \in R$, що $a = r \cdot m$, $rR + cR = R$. З умови $mR \subseteq m'R \neq R$ випливає $m'R + cR \neq R$. Нехай $h = (d, r)$ – найбільший спільний дільник елементів d і r. Тоді $d = d_0 h$, $r = r_0 h$, $r_0, d_0 \in R$, причому $hd \cdot x = h r_0 m$. Отже, $d_0 x = r_0 m$. Оскільки $d_0 R + r_0 R = R$, то $mR \subseteq d_0 R$. Якщо тепер $d_0 R \subseteq d_0' R \neq R$, то d_0 можна взяти в якості m' і отримати $d_0 R + cR \neq R$. Враховуючи $hR + cR = R$, бачимо, що розклад $d = d_0 \cdot h$ має властивості, описані у визначенні адекватного елемента. Таким чином, d – адекватний елемент області R.

Теорема. Комутативна область Безу адекватна тоді і лише тоді, коли довільний її ненульовий простий ідеал містить хоча б один адекватний елемент.

Доведення. Припустимо, що в області R існують неадекватні елементи, а кожний ненульовий простий ідеал містить принаймні один адекватний елемент. Нехай a-ненульовий неадекватний елемент. Якщо ідеал aR містить деякий адекватний елемент $b \in R$, то $b = ax$, $x \in R$. Звідси випливає, що елемент a адекватний, як дільник елемента b. Отже, ідеал aR не містить жодного адекватного елемента. З огляду на твердження I ідеал aR міститься в деякому максимально неадекватному ідеалі P. Внаслідок твердження 2 P - простий ідеал. Таким чином, P містить деякий адекватний елемент, а це суперечить неадекватності ідеалу P. Звідси випливає, що в кільці R немає ненульових неадекватних елементів. Обернена імплікація очевидна.

Використовуючи результати праці [3], можемо довести таке твердження.

<u>Твердження 3.</u> Нехай P - простий ідеал області R, який містить хоча б один адекватний елемент. Тоді P міститься в одному і тільки одному максимальному ідеалі кільця.

<u>Доведення</u>. Якщо P - максимальний ідеал, то все очевидно. Нехай P не максимальний ідеал кільця R і $a \in P$, де $a \in A(R)$. Припустимо, що існують два різні максимальні ідеали M_1 і M_2, які містять ідеал P. Оскільки M_1 і M_2 різні, то існують такі елементи $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$, що $m_1R + m_2R = R$. Коли $a = z \cdot s$, де $zR + m_1R = R$, і для будь-якого необоротного дільника s' елемента s ідеал $s'R + m_1R$ властивий, то $s \in P$ /оскільки P - простий ідеал і $P \subset M_1$ /. Нехай $d = (s, m_2)$. Тому що $P \subset M_2$, то d необоротний дільник елемента s. Але $dR + m_1R \supset m_2R + m_1R = R$. Отже, $a \notin A(R)$. Отримана суперечність з вибором елемента a доводить наше твердження.

<u>Твердження 4.</u> Кожний елемент, який не міститься в жодному максимально неадекватному ідеалі, є адекватним елементом.

<u>Доведення</u>. Нехай елемент a не міститься в жодному максимально неадекватному ідеалі і $a \notin A(R)$. Якщо всі елементи ідеалу aR неадекватні, то згідно з твердженням I він, а значить і елемент a, міститься в деякому максимально неадекватному ідеалі. Це суперечить вибору елемента a. Отже, aR містить деякий адекватний елемент b. Оскільки $b = a \cdot z$, то $a \in A(R)$.

Позначимо через $S(R)$ перетин всіх максимально неадекватних ідеалів кільця R.

<u>Твердження 5</u>. Нехай $b \in S(R)$ і $a \in A(R)$. Тоді для довільного $x \in R$ елемент $a + bx$ є адекватним.

Доведення. Нехай $z = a + bx \in A(R)$. Очевидно, що ідеал $(a+bx)R$ неадекватний. Тому існує максимально неадекватний ідеал N, який містить е змент $a + bx$. Оскільки $b \in S(R)$, то $a = z - bx \in N$. Це неможливо, тому що $a \in A(R)$. Отримана суперечність доводить наше твердження.

Твердження 6. Нехай I – такий ідеал кільця R, що для будь-яких $i \in I$, $a \in A(R)$ елемент $i + a$ адекватний. Тоді $I \subseteq S(R)$.

Доведення. Припустимо, що існує максимально неадекватний ідеал P кільця R, який задовольняє умову $(I+P) \cap A(R) \neq \phi$. Якщо $a \in (I+P) \cap A(R)$, то $a = p - i$, де $p \in P$.

Згідно з твердженням 5, $a + i = p \in A(R)$. Оскільки P не містить адекватних елементів, то отримуємо суперечність, яка доводить твердження.

Твердження 7. Наступні твердження еквівалентні:
1/ в кільці R існує єдиний максимально неадекватний ідеал N;
2/ сума будь-яких двох неадекватних елементів є неадекватним елементом.

Доведення: 1/ → 2/. Припустимо, що існують неадекватні елементи a і $b \in R$, сума яких $a + b$ адекватний елемент. Оскільки $a, b \notin A(R)$, то $a, b \in N$. N – ідеал, отже, $a + b \in N$. З іншого боку, $a + b \in A(R)$. Отримана суперечність доводить цю імплікацію. Імплікація 2/ → 1/ очевидна з огляду на те, що добуток будь-якого неадекватного елемента на довільний елемент кільця неадекватний елемент.

Існування кілець, які задовольняють умови твердження 7, можна виявити на конкретному прикладі. А саме, в якості такого кільця можна взяти підкільце кільця формальних степеневих рядів з комутуючою змінною над полем раціональних чисел, яке складається з рядів з цілим вільним членом /детальніше див. працю [3].

Зауваження. Результати нашої статті пов'язані з дослідженнями, які викладені у праці [4]. Зокрема доведена теорема є аналогом результату з [4], який свідчить, що комутативна область цілісності є факторіальною тоді і тільки тоді, коли кожний її ненульовий простий ідеал містить хоча б один простий елемент.

1. A m i t s u r S.A. Remarks of principal ideal rings // Osaka Math. J. 1963. N 15. P.59-69. 2. H e l m e r O. The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions // Bull. Amer. Math. Soc. 1943. N 49. P. 225-236. 3. H e n r i k s e n M. Some remarks about elementary divisor rings // Math. J. 1955. Vol. 56. N 3. P. 362-365. 4. K a p l a n s k y J. Commutative rings // Boston. 1972.

Стаття надійшла до редколегії 23.02.87

УДК 517.958:536.12

Є.Г.Грицько, Р.В.Гудзь, Р.З.Букавіна

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ УСТАЛЕНОГО РОЗВ"ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПЕРЕНОСУ В ЛОКАЛЬНО-НЕОДНОРІДНІЙ ОБЛАСТІ

Розглянемо двовимірну область $\Omega = \{(x_1, x_2): x_i^- < x_i < x_i^+,$ $x_i^- = 0,\ x_i^+ = \pi,\ i = 1,2\}$, в якій поведінка фізичної величини θ описується рівнянням

$$(\partial/\partial x_1)(\lambda(x_1,x_2)(\partial\theta/\partial x_1)) + (\partial/\partial x_2)(\lambda(x_1,x_2)(\partial\theta/\partial x_2)) = \frac{\partial\theta}{\partial F_0} - \omega. \quad /1/$$

Нехай θ задовольняє граничні умови

$$\theta\big|_{x_i = x_i^\pm} = 0, \quad i = 1,2. \quad /2/$$

Вважатимемо, що

$$\lambda(x_1,x_2) = \lambda_0 + \lambda_g(x_1,x_2)\chi_g,$$

$$\omega = (\omega_c \cos\zeta_\tau F_0 + \omega_s \sin\zeta_\tau F_0)\chi_\omega, \quad /3/$$

де χ_g – характеристична функція області $\Omega_g = \{(x_1,x_2):$ $x_i^- < x_{gi}^- < x_i < x_{gi}^+ < x_i^+,\ i = 1,2\}$, χ_ω – характеристична функція області $\Omega_\omega = \{(x_1,x_2): x_i^- < x_{\omega i}^- < x_i < x_{\omega i}^+ < x_i^+,\ i = 1,2\}$ такої, що $\Omega_\omega \cap \Omega_g = \emptyset$, $\operatorname{supp} \lambda_g = \Omega_g$.

Використовуючи /3/ в /1/, записуємо

$$\Delta\theta - \frac{\partial\theta}{\partial F_0} = P_g\theta - \omega, \quad /4/$$