1. A m i t s u r S. A. Remarks of principal ideal rings // Osaka Math. J. 1963. № 15. P. 59-69. 2. H e l m e r O. The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions // Bull. Amer. Math. Soc. 1943. № 49. P. 225-236. 3. H e n r i k s e n M. Some remarks about elementary divisor rings // Math. J. 1955. Vol. 56. № 3. P. 362-365. 4. K a p l a n s k y J. Commutative rings // Boston. 1972.

Стаття надійшла до редколегії 23.02.87

УДК 517.958:536.12

Є.Г.Грицько, Р.В.Гудзь, Р.З.Букавіна

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ УСТАЛЕНОГО РОЗВ"ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПЕРЕНОСУ В ЛОКАЛЬНО-НЕОДНОРІДНІЙ ОБЛАСТІ

Розглянемо двомірну область $\Omega = \{(x_1, x_2): x_i^- < x_i < x_i^+,\ x_i^- = 0,\ x_i^+ = \pi,\ i = 1,2\}$, в якій поведінка фізичної величини θ описується рівнянням

$$(\partial/\partial x_1)(\lambda(x_1,x_2)(\partial\theta/\partial x_1)) + (\partial/\partial x_2)(\lambda(x_1,x_2)(\partial\theta/\partial x_2)) = \frac{\partial\theta}{\partial F_0} - \omega. \quad /1/$$

Нехай θ задовольняє граничні умови

$$\theta\big|_{x_i = x_i^\pm} = 0, \quad i = 1,2. \quad /2/$$

Вважатимемо, що

$$\lambda(x_1,x_2) = \lambda_0 + \lambda_g(x_1,x_2)\chi_g,$$

$$\omega = (\omega_c \cos \zeta_\tau F_0 + \omega_s \sin \zeta_\tau F_0)\chi_\omega, \quad /3/$$

де χ_g – характеристична функція області $\Omega_g = \{(x_1,x_2): x_i^- < x_{gi}^- < x_i < x_{gi}^+ < x_i^+,\ i = 1,2\}$, χ_ω – характеристична функція області $\Omega_\omega = \{(x_1,x_2): x_i^- < x_{\omega i}^- < x_i < x_{\omega i}^+ < x_i^+,\ i = 1,2\}$ такої, що $\Omega_\omega \cap \Omega_g = \emptyset$, $\operatorname{supp} \lambda_g = \Omega_g$.

Використовуючи /3/ в /1/, записуємо

$$\Delta\theta - \frac{\partial\theta}{\partial F_0} = P_g\theta - \omega, \quad /4/$$

де $$P_g = -\Lambda_g^{-1} \sum_{i=1}^{2} (\partial \Lambda_g / \partial x_i)(\partial / \partial x_i)\, \chi_g; \quad \Lambda_g = \lambda_g / \lambda_0;$$

$$\Delta = (\partial^2 / \partial x_1^2) + (\partial^2 / \partial x_2^2).$$

З метою одержання розв"язку задачі /4/, /2/ розглянемо крайову задачу

$$\Delta \theta_u - (\partial \theta_u / \partial F_0) = P_g \theta_u - W_u, \qquad /5/$$

$$\theta_u \Big|_{x_i = x_i^{\pm}} = 0, \quad i = 1, 2, \qquad /6/$$

де

$$\theta_u = (\theta_c + i\theta_s) e^{-i\zeta_\tau F_0} = u\, e^{-i\zeta_\tau F_0};$$

$$W_u = (\omega_c + i\omega_s) e^{-i\zeta_\tau F_0} = W e^{-i\zeta_\tau F_0},$$

дійсна частина розв"язку θ_u якої збігається з усталеним розв"язком задачі /4/, /2/ [2]. На основі /5/, /6/ для визначення u маємо

$$\Delta u + i\zeta_\tau u = P_g u - W, \qquad /7/$$

$$u \Big|_{x_i = x_i^{\pm}} = 0, \quad i = 1, 2. \qquad /8/$$

Виберемо M базових функцій $\psi_m(x_1, x_2)$ і зобразимо наближення розв"язку задачі /7/, /8/ в області Ω_g у вигляді

$$u_g = \sum_{m=1}^{M} d_m \psi_m(x_1, x_2), \qquad /9/$$

де d_m - невідомі коефіцієнти. Внаслідок використання /9/ у правій частині /7/ [1, 4] крайова задача /7/, /8/ зводиться до такої задачі відносно u^* :

$$\Delta u^* + i\zeta_\tau u^* = \sum_{m=1}^{M} d_m P_g \psi_m - W, \qquad /10/$$

$$u^* \Big|_{x_i = x_i^{\pm}} = 0, \quad i = 1, 2. \qquad /11/$$

Двічі застосуємо до /10/ з врахуванням /11/ скінченне синус-перетворення Фур"є по змінних x_1 та x_2. Тоді

$$(i\zeta_\tau - \zeta_1^2 - \zeta_2^2)\bar{\bar{u}}^* = \sum_{m=1}^{M} d_m \overline{\overline{P_g \psi_m}} - \bar{\bar{W}}, \qquad /12/$$

де $$\overline{\overline{P_g \psi_m}} = \int_{x_{g1}^-}^{x_{g1}^+} dx_1 \int_{x_{g2}^-}^{x_{g2}^+} P_g \psi_m \sin \zeta_1 x_1 \sin \zeta_2 x_2 \, dx_2, \quad m = \overline{1, M};$$

$$\overline{W}=\int\limits_{x_{\omega 1}^-}^{x_{\omega 1}^+} dx_1 \int\limits_{x_{\omega 2}^-}^{x_{\omega 2}^+} W \sin\zeta_1 x_1 \sin\zeta_2 x_2 \, dx_2 ;$$

$$\zeta_i = n_i \pi / x_i^+ , \quad n_i \in N \quad (i=1,2).$$

Визначивши $\overline{\overline{U}}^*$ з /12/ і перейшовши до оригіналу, одержимо

$$u^* = u_\omega^* - \sum_{m=1}^{M} d_m u_m^* ,$$

де

$$u_\omega^* = 4/(x_1^+ x_2^+) \sum_{n_1,n_2=1}^{\infty} (A+iB)\overline{W} \sin\zeta_1 x_1 \sin\zeta_2 x_2 ;$$

$$u_m^* = 4/(x_1^+ x_2^+) \sum_{n_1,n_2=1}^{\infty} (A+iB)\overline{\overline{P_g \psi_m}} \sin\zeta_1 x_1 \sin\zeta_2 x_2 , \quad m=\overline{1,M};$$

$$A=(\zeta_1^2+\zeta_2^2)C^{-1}; \quad B=\zeta_\tau C^{-1}; \quad C=(\zeta_1^2+\zeta_2^2)^2+\zeta_\tau^2 .$$

Тоді, згідно з [2], $Q^* = Re(u^* e^{-i\zeta_\tau F_0})$, тобто

$$\theta^* = \theta_A \sin(\zeta_\tau F_0 + \varphi). \qquad /13/$$

Тут введено позначення $\theta_A = \sqrt{P^2+Q^2}$, $\varphi = arcsin(P/\theta_A)$,

$$P=4/(x_1^+ x_2^+) \sum_{n_1,n_2=1}^{\infty} A(\overline{\overline{W}} - \sum_{m=1}^{M} d_m \overline{\overline{P_g \psi_m}}) \sin\zeta_1 x_1 \sin\zeta_2 x_2 ,$$

$$Q=4/(x_1^+ x_2^+) \sum_{n_1,n_2=1}^{\infty} B(\overline{\overline{W}} - \sum_{m=1}^{M} d_m \overline{\overline{P_g \psi_m}}) \sin\zeta_1 x_1 \sin\zeta_2 x_2 .$$

Розіб"ем область Ω_g на M елементів Ω_{gi} таких, що $\Omega_g \bigcup\limits_{i=1}^{M} \Omega_{gi}$ і $\Omega_{gi} \cap \Omega_{gj} = \phi$ при $i \neq j$. Коефіцієнти d_m визначимо з умов ортогональності нев"язки $z_M(x_1,x_2)=U_g-U^*$ характеристичним функціям елементів розбиття [3]

$$\sum_{m=1}^{M} d_m \iint\limits_{\Omega_{gi}} (\psi_m + u_m^*) dx_1 dx_2 = \iint\limits_{\Omega_{gi}} u_\omega^* dx_1 dx_2 , \quad i=\overline{1,M}. \qquad /14/$$

Таким чином, усталений розв'язок задачі /4/, /2/ виражається за формулою /12/ з використанням розв"язку $d=(d_1,d_2,\dots,d_M)$ системи рівнянь /13/.

Числові розрахунки проводили для $x_2^+=\pi$;

$$x_{g1}^{\pm}=(\pi/2)\pm 0{,}4; \quad x_{g2}^{-}=(\pi/2)+0{,}35; \quad x_{g2}^{+}=(\pi/2)+0{,}75;$$

$$x_{\omega 1}^{\pm}=(\pi/2)\pm 0{,}3; \quad x_{\omega 2}^{\pm}=(\pi/2)\pm 0{,}3; \quad \omega_s=\omega_c=0{,}125; \quad \zeta_\tau=1;$$

$$\Lambda_q = exp(C_\lambda f_{\lambda 1} f_{\lambda 2}); \quad f_{\lambda i} = \sin\left(\pi(x_i - x_{qi}^-)/(x_{qi}^+ - x_{qi}^-)\right), \; i = 1,2.$$

Отже, з ростом коефіцієнта λ в Ω_q величина ψ в області $\Omega_c = \{(x_1, x_2) : x_{\omega 1}^- < x_1 < x_{\omega 1}^+, \; x_{\omega 2}^+ < x_2 < x_{q2}^-\}$ зростає, а в області $\Omega_0 = \{(x_1, x_2) : x_{q1}^- < x_1 < x_{q1}^+, x_{q2}^+ < x_2 < x_2^-\}$ - спадає.

1. Грицько Е.Г., Гудзь Р.В. Нагрев полого цилиндра с кольцевым включением трапециедального сечения // Мат. методы и физ.-мех. поля. К., 1985. Вып. 22. С. 106-109. 2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., 1964. 3. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М., 1981. 4. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М., 1984.

Стаття надійшла до редколегії 20.04.87

УДК 515.12

Т.О.Банах

ПРО ПРОДОВЖЕННЯ ПСЕВДОМЕТРИК НА ПРОСТІР ІМОВІРНІСНИХ МІР

Нехай X - компакт і $P(X)$ - простір імовірнісних мір на X, наділений $*$ - слабою топологією. Конструкція простору імовірнісних мір функторіальна в категорії $Comp$ компактів і неперервних відображень [2]. Позначимо через $\eta = [\eta_X]$ природне перетворення тотожного функтора Id в функтор P [1].

Для метричного компакта (X, d) простір $P(X)$ метризується так: якщо $\mu, \nu \in P(X)$, то $\bar{d}(\mu, \nu) = \inf\{\lambda(d) \mid \lambda \in P(X \times X),$ $P(pr_1)(\lambda) = \mu, \; P(pr_2)(\lambda) = \nu\}$ $(pr_i : X \times X \to X$ - проекція на i-й співмножник/. В.В.Федорчук розглянув метричну пряму границю $F(X)$ послідовності

$$X \xrightarrow{\eta_X} P(X) \xrightarrow{\eta_{P(X)}} P(P(X)) \xrightarrow{\eta_{P^2(X)}} \dots$$

і встановив ряд геометричних властивостей одержаного функтора F, його поповнення та компактифікації.

Постає задача продовження розглянутого функтора з категорії $\mu Comp$ метризованих компактів на категорію $Comp$. М.М.Зарічний запропонував будувати таке продовження за допомогою псевдометрик.