

1. $\lambda = \sum_{i=1}^K \alpha_i \tilde{\tau}_i$. Тоді $P(\rho z_1)(\lambda) \leq \mu_i$, $P(\rho z_2)(\lambda) \leq \mu$.
 Існує імовірнісна міра $\tilde{\lambda} \in P(X^2)$ така, що $\lambda \leq \tilde{\lambda}$ і
 $P(\rho z_1)(\tilde{\lambda}) = \mu_i$, $P(\rho z_2)(\tilde{\lambda}) = \mu$. Одержуємо $\bar{d}(\mu_i, \mu) \leq$
 $\leq \tilde{\lambda}(d) = \lambda(d) + (\tilde{\lambda} - \lambda)(d) < (\varepsilon/2) + (M \cdot \varepsilon/2M) = \varepsilon$,
 тобто $\bar{d}$ - неперервна. Теорема доведена.

Наступний результат подаємо без доведення.

Теорема. Нехай $\{d_\alpha\}$ - сім'я псевдометрик, що задає одно-
 стайну структуру на компакт X . Тоді сім'я $\{d_\alpha\}$ задає
 одностайну структуру на просторі $P(X)$.

1. Ф е д о р ч у к В.В. Мягкие отображения, многозначные
 ретракции и функторы // Успехи мат. наук. 1966. Т.41. Вып.6.
 С.121-159. 2. Щ е п и н Е.В. Функторы и несчетные степени ком-
 пактов // Успехи мат. наук. 1981. Т.36. Вып. 3. С. 3-62.

Стаття надійшла до редколегії 23.03.87

УДК 539.377

Б.В.Процюк, В.М.Синюта

ФУНКЦІЯ ГРІНА СТАЦІОНАРНОЇ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ БАГАТОШАРОВОГО ЦИЛІНДРА

Для знаходження розв'язку задач теплопровідності часто засто-
 совують метод граничних елементів [2]. Однак функції Гріна,
 на використанні яких базується цей метод, відомі лише для окре-
 мих задач.

Побудуємо функцію Гріна для області, яка складається з n -
 концентрично розміщених ідеально контактуючих безмежних циліндрів.
 Для цього застосуємо рівняння

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial G}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 G}{\partial \zeta^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\lambda_{k+1}} \frac{\partial G}{\partial \rho} \Big|_{\rho=z_k=0} \quad (1)$$

$$\times \delta(\rho - z_k) = -(1/\rho \lambda(\rho)) \delta(\rho - z) \delta(\zeta - z)$$

і граничні умови

$$\left[\lambda_n \frac{\partial G}{\partial \rho} + \alpha_n G \right]_{\rho=z_n} = 0, \quad \left[\lambda_1 \frac{\partial G}{\partial \rho} - \alpha_1 G \right]_{\rho=z_0} = 0, \quad (2)$$

де

$$\lambda(\rho) = \lambda_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) S(\rho - z_k);$$

λ_k, z_k - коефіцієнт теплопровідності та зовнішній радіус k -го шару; z_0 - внутрішній радіус першого шару; α_n, α_1 - коефіцієнти тепловіддачі відповідно зі зовнішньої і внутрішньої поверхні циліндра; $S(x)$ - функція Хевісайда; $\delta(x)$ - функція Дірака; $z \neq z_k / k = 0, 1, \dots, n$. Тут використана конструкція множення кусково-неперервних функцій і дельта-функцій Дірака [4] при $\beta = 1$.

Беручи до уваги симетричність функції Гріна по координаті ζ , надалі вважатимемо $z = 0$ і задачу /1/, /2/ розглядатимемо для напівбезмежного циліндра.

Застосуємо інтегральне косинус-перетворення Фур'є [3] по змінній ζ до рівняння /1/. Дістаємо диференціальне рівняння, розв'язком якого є функція

$$\bar{G}(z, \rho, \eta) = -(1/2 \lambda(z)) \psi_{0,0}(\rho, z) S(\rho - z) - \sum_{k=1}^{n-1} ((\lambda_{k+1} - \lambda_k) / \lambda_{k+1}) \times \\ \times z_k \psi_{0,0}(\rho, z_k) (d\bar{G}/d\rho) \Big|_{\rho=z_k-0} S(\rho - z_k) + c_1 I_0(\eta \rho) + c_2 K_0(\eta \rho), \quad /3/$$

де

$$\psi_{0,0}(x, y) = I_0(\eta x) K_0(\eta y) - K_0(\eta x) I_0(\eta y),$$

$I_\nu(x), K_\nu(x)$ - модифіковані функції Бесселя / $\nu = 0, 1$; η - параметр перетворення Фур'є.

Зобразимо значення похідної від функції $\bar{G}$ на стиках шарів у вигляді

$$\frac{d\bar{G}}{d\rho} \Big|_{\rho=z_k-0} = c_1 H_1^{(k)} + c_2 H_2^{(k)} + E^{(k)}(z). \quad /4/$$

Підставимо /4/ у /3/. Формула для $\bar{G}$ набуває вигляду

$$\bar{G} = c_1 \{ I_0(\eta \rho) - \sum_{k=1}^{n-1} ((\lambda_{k+1} - \lambda_k) / \lambda_{k+1}) z_k \psi_{0,0}(\rho, z_k) H_1^{(k)} S(\rho - z_k) \} + \\ + c_2 \{ K_0(\eta \rho) - \sum_{k=1}^{n-1} ((\lambda_{k+1} - \lambda_k) / \lambda_{k+1}) z_k \psi_{0,0}(\rho, z_k) H_2^{(k)} S(\rho - z_k) \} - \\ - (1/2 \lambda(z)) \psi_{0,0}(\rho, z) S(\rho - z) - \sum_{k=1}^{n-1} ((\lambda_{k+1} - \lambda_k) / \lambda_{k+1}) z_k \psi_{0,0}(\rho, z_k) E^{(k)}(z) S(\rho - z_k). \quad /5/$$

Визначаючи з /5/ $(d\bar{G}/d\rho) \Big|_{\rho=z_k-0}$ і використовуючи /4/, одержуємо рекурентні співвідношення для знаходження $H_1^{(k)}, H_2^{(k)}, E^{(k)}(z)$:

$$\begin{aligned}
H_1^{(K)} &= \eta \left\{ I_1(\eta z_K) - \sum_{m=1}^{K-1} ((\lambda_{m+1} - \lambda_m) / \lambda_{m+1}) z_m \psi_{1,0}(z_K, z_m) H_1^{(m)} \right\}, \\
H_2^{(K)} &= \eta \left\{ -K_1(\eta z_K) - \sum_{m=1}^{K-1} ((\lambda_{m+1} - \lambda_m) / \lambda_{m+1}) z_m \psi_{1,0}(z_K, z_m) H_2^{(m)} \right\}, \\
E^{(K)}(z) &= \eta \left\{ -(1/2 \lambda(z)) \psi_{1,0}(z_K, z) S(z_K - z) - \sum_{m=1}^{K-1} ((\lambda_{m+1} - \lambda_m) / \lambda_{m+1}) \times \right. \\
&\quad \left. \times z_m \psi_{1,0}(z_K, z_m) E^{(m)}(z) \right\},
\end{aligned} \quad /6/$$

де

$$\psi_{1,0}(x, y) = I_1(\eta x) K_0(\eta y) + K_1(\eta x) I_0(\eta y).$$

Константи C_1 і C_2 визначаємо з граничних умов /2/:

$$C_i = (-1)^{i-1} B P_i / (A_1 P_1 - A_2 P_2) \quad (i = 1, 2), \quad /7/$$

де

$$\begin{aligned}
A_j &= R_j - \sum_{k=1}^{n-1} ((\lambda_{k+1} - \lambda_k) / \lambda_{k+1}) z_k F(z_n, z_k) H_j^{(K)} \quad (j = 1, 2); \\
B &= (1/2 \lambda(z)) F(z_n, z) + \sum_{k=1}^{n-1} ((\lambda_{k+1} - \lambda_k) / \lambda_{k+1}) z_k F(z_n, z_k) E^{(K)}(z);
\end{aligned}$$

$$F(x, y) = \lambda_n \eta \psi_{1,0}(x, y) + \alpha_n \psi_{0,0}(x, y);$$

$$R_1 = \lambda_n \eta I_1(\eta z_n) + \alpha_n I_0(\eta z_n), \quad R_2 = -\lambda_n \eta K_1(\eta z_n) + \alpha_n K_0(\eta z_n);$$

$$P_1 = -\lambda_1 \eta K_1(\eta z_0) - \alpha_1 K_0(\eta z_0), \quad P_2 = \lambda_1 \eta I_1(\eta z_0) - \alpha_1 I_0(\eta z_0).$$

У випадку суцільного циліндра

$$C_1 = B/A_1, \quad C_2 = 0. \quad /8/$$

Для кусково-однорідного по радіальній координаті простору у /7/, /8/ слід прийняти

$$A_1 = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} ((\lambda_{k+1} - \lambda_k) / \lambda_{k+1}) z_k K_0(\eta z_k) H_1^{(K)}, \quad /9/$$

$$A_2 = - \sum_{k=1}^{n-1} ((\lambda_{k+1} - \lambda_k) / \lambda_{k+1}) z_k K_0(\eta z_k) H_2^{(K)},$$

$$B = (1/2 \lambda(z)) K_0(\eta z) + \sum_{k=1}^{n-1} ((\lambda_{k+1} - \lambda_k) / \lambda_{k+1}) z_k K_0(\eta z_k) E^{(K)}(z).$$

Перехід від трансформант до оригіналів здійснюємо за формулою

$$G = (2/\pi) \int_0^{\infty} \bar{G} \cos \eta \zeta d\eta. \quad /10/$$

Функція $\bar{G}$ зручна для числових розрахунків при $\rho < \zeta$, а при $\rho > \zeta$ здійснити її числову реалізацію важко через наявність доданків, що поведуть себе як $e^{\eta(\rho-\zeta)}$. У цьому випадку слід скористатися симетричністю функції Гріна [1].

Наведені формули дають змогу розв'язувати стаціонарні осесиметричні задачі теплопровідності методом граничних елементів, не здійснюючи розбиття границі розділу шарів.

1. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М., 1984. 2. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М., 1984. 3. Галицын А.С., Жуковский А.Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. К., 1976. 4. Процюк Б.В. Температурные поля и напряжения в многослойных цилиндрических телах: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1983.

Стаття надійшла до редколегії 23.02.87

УДК 517.53

М. Й. Гречанюк

ПРО ЕКВИВАЛЕНТНІСТЬ ЛОГАРИФМІВ МАКСИМУМУ МОДУЛЯ І МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА ЦІЛОГО КРАТНОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ

Відомо *, що для цілої функції f , заданої абсолютно збіжним в $\mathbb{C}$ рядом Діріхле, вигляду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{z \lambda_n\}, 0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n \uparrow +\infty (n \rightarrow +\infty)$$

співвідношення

$$\ln M(x, f) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, f) \quad /1/$$

при $x \rightarrow +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри виконується. тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n \lambda_n) < +\infty,$$

де $M(x, f) = \sup\{|f(x+iy)| : y \in \mathbb{R}\}$, $\mu(x, f) = \max\{|a_n| \exp\{x \lambda_n\} : n \geq 0\}$.

* С к о с к и в О.Б. О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию // Мат. заметки. 1985. 1. 37. № 1. С. 41-47.