Теорема 3. Нехай $\psi \in L$. Для довільних послідовностей $(\lambda_n^{(j)})$, $j=1,2$ таких, що

$$\overline{\lim_{R\to+\infty}} (1/(\psi(\eta R))) \sum_{0<\lambda_k^*<R} 1/(k\lambda_k^*) \geq b,$$

при деяких $\eta \in (0,+\infty)$ і $b \in (0,+\infty)$ і

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln k}{\lambda_k^* \sum_{0<l<k}' 1/(l\lambda_l^*)} = 0 \qquad /4/$$

існує функція $F_1 \in S(\psi)$ і кут K, означений вище, всередині якого при $|x| \to \infty$ рівність /3/ не може виконуватися для жодної множини $E \in C_0$.

Зауваження. Теорема 3 залишиться справедливою, якщо в ній /4/ замінити на умову

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{\lambda_k^* \psi(\eta\lambda_k^*)} = 0.$$

Стаття надійшла до редколегії 09.03.87

УДК 517.537

О.Б.Скаскiв

ПРО НАЯВНІСТЬ ВИНЯТКОВИХ ЗНАЧЕНЬ У СПІВВІДНОШЕННІ ТИПУ БОРЕЛЯ ДЛЯ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Нехай $\Lambda=(\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$, $0=\lambda_0<\lambda_n \uparrow \infty$ $(1 \leq n \to \infty)$. Через $S(\Lambda)$ позначимо клас цілих функцій F, зображених абсолютно збіжними в $\mathbb{C}$ рядами Діріхле /клас цілих рядів Діріхле/ $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(z\lambda_n)$, а через S_Φ – клас цілих рядів Діріхле, для яких виконується умова $\ln M(x) \leq x\Phi(x)$ $(x_0 \leq x < \infty)$, де $M(x)=\sup\{|F(x+iy)| : |y|<\infty\}$, $\Phi(x)$ неперервна додатна зростаюча до $+\infty$ при $x \to +\infty$ функція.

Відомо [2], для того щоб для кожної функції $F \in S(\Lambda)$ виконувалось співвідношення

$$\ln M(x) = (1+o(1)) \ln \mu(x) \quad \left(\mu(x) \overset{def}{=} \max\{|a_n|\exp(x\lambda_n) : n \geq 0\}\right) \qquad /2/$$

при $x \to +\infty$ зовні деякої виняткової множини скінченної міри, необхідно і досить $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n\lambda_n) < \infty$.

У [3] показано, що для будь-якої функції $\Phi(x) \uparrow +\infty$ існує послідовність $\Lambda=(\lambda_n)$ така, що в класі $S(\Lambda) \cap S_\Phi$ співвідношення /I/ виконується при $x \to +\infty$, тобто винятковa множина відсутня. У зв"язку з цим виникає запитання: чи для будь-якого класу $S(\Lambda)$ у співвідношенні /I/ існують виняткові значення x. Відповідь дає така теорема.

Теорема. Для будь-якої послідовності $\Lambda=(\lambda_n), 0=\lambda_0<\lambda_n \uparrow \infty$ і для будь-якого $h>0$ існує $F \in S(\Lambda)$ така, що для деякої послідовності $x_n \to +\infty$ виконується нерівність $\ln M(x) > (h+1) \times \ln \mu(x)$ $(x=x_n)$.

Доведення. Не зменшуючи загальності, вважаємо $\ln n = o(\lambda_n)$ $(n \to +\infty)$. Оберемо послідовність натуральних чисел (n_j) таку, що:
а/ $2\lambda_{n_j} < \lambda_{n_{j+1}}$; б/ $(1/\lambda_{n_j})\ln(n_{j+1}-n_j) \uparrow \infty$ $(0 \leq j \to +\infty)$; в/ $n_0=1$.
Приймемо $a_0=a_{n_0}=1$, $\ln a_{n_{j+1}} = \ln a_{n_j} - (1/h)((\lambda_{n_{j+1}}/\lambda_{n_j})-1)\ln(n_{j+1}-n_j)$, $j \geq 0$, а для $n_j+1 \leq n \leq n_{j+1}-1$ візьмемо $a_n = a_{n_j}\exp\{-(\lambda_n-\lambda_{n_j})x_j\}$, де $x_j=(1/(\lambda_{n_{j+1}}-\lambda_{n_j}))(\ln a_{n_j}-\ln a_{n_{j+1}})$. Розглянемо функцію $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(z\lambda_n)$. Оскільки $(\ln a_{n_j}+\lambda_{n_j}x_j) \geq 0$ $(j>0)$, то при $n_j \leq n < n_{j+1}-1$ маємо $-(1/\lambda_n)\ln a_n \geq -(1/\lambda_{n_j})\ln a_{n_j}$. Зауважимо, що внаслідок умов а, б вибору (n_j) $\lim_{j\to\infty}(-(1/\lambda_{n_j})\ln a_{n_j})=+\infty$, тому $\lim_{n\to+\infty}(-(1/\lambda_n)\ln a_n)=+\infty$. Отже, функція $F \in S(\Lambda)$ [1].

Елементарні міркування, які через громіздкість опускаємо, показують, що для $n_j \leq n \leq n_{j+1}-1$ $a_n\exp\{x_j\lambda_n\}=\mu(x_j)$; крім того, $\ln\mu(x_j)=\ln a_{n_j}+x_j\lambda_{n_j} \leq (1/h)\ln(n_{j+1}-n_j)$, тому

$$M(x_j)=F(x_j) \geq \sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} a_n e^{x_j\lambda_n} = (n_{j+1}-n_j)\mu(x_j).$$

Звідси остаточно одержуємо

$$\ln M(x_j) \geq (1+h)\ln\mu(x_j) \quad (j \geq 0).$$

1. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. М., 1976. 2. Скаскив О.Е. О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию // Мат. заметки. 1985. Т.37. № 1. С. 41-47. 3. Шеремета М.Н. Усиление теоремы Бореля и его приложение // Теория функций, функциональный анализ и их приложение. 1985. Вып. 43. С. 132-136.

Стаття надійшла до редколегії 09.02.87