УДК 519.21

І.Д.Квіт, В.М.Косарчин

ВИПАДКОВИЙ ПРОЦЕС ЯК ЗГОРТКА АБО АМПЛІФІКАЦІЯ

Випадкова змінна ξ з функцією розподілу ймовірностей $F(x)$ має характер

$$C(s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}dF(x), \quad -\infty < s < \infty . \qquad /1/$$

Тоді $C^2(s)$ є характером суми двох незалежних однаково розподілених випадкових змінних з функцією розподілу у вигляді згортки

$$F(x)|_*^2 = F*F = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)\,dF(y). \qquad /2/$$

Якщо функція $C(s)$ не має нулів, то при довільному додатному t вираз

$$C^t(s)=e^{t\ln C(s)}, \qquad /3/$$

де $\ln C(s)$ - головне значення логарифму має сенс і є характером континуальної згортки порядку t, тобто випадкового процесу $F(x)|_*^t$ з твірною функцією розподілу $F(x)$.

Зазначимо, що для абсолютно неперервної випадкової змінної ξ з густиною $p(x)=F'(x)$ відповідно маємо характер

$$C(s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}p(x)\,dx, \quad -\infty < s < \infty,$$

згортку густин

$$p(x)|_*^2 = \int_{-\infty}^{\infty} p(x-y)\,p(y)\,dy$$

та густину випадкового процесу $p(x)|_*^t$ з твірною густиною $p(x)$ [1].

<u>Приклади.</u> Характер пуассонівської змінної

$$C(s)=e^{\lambda(e^{is}-1)}, \quad -\infty < s < \infty, \quad (\lambda > 0)$$

не має нулів. Отже,

$$C^t(s)=e^{\lambda t(e^{is}-1)}, \quad t > 0$$

є характером випадкового процесу. За зворотною формулою

$$F(x)|_*^t = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t}((\lambda t)^k/k!)E(x-k), \quad E(x-a)=\begin{cases}0, & x<a\\ 1, & x>a\end{cases}. \qquad /4/$$

Розподіл /4/ пуассонівського процесу вперше одержано як розв"язок відповідної системи диференціальних рівнянь.

2. Характер нормальної змінної

$$C(s)=e^{ics+(1/2)Ds^2}, \quad -\infty<s<\infty, \ (-\infty<c<\infty, \ D>0)$$

не має нулів. Звідси

$$C^t(s)=e^{icts+(1/2)Dts^2}; \quad t>0$$

є характером випадкового процесу. За зворотною формулою

$$p(x)\Big|_*^t=\frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}}\,e^{-\frac{(x-ct)^2}{2Dt}}, \qquad -\infty<x<\infty. \qquad /5/$$

Густину /5/ вперше одержано як розв"язок рівняння дифузії. Формула /5/ виражає густину ймовірності того, що в момент t частинка перебуватиме в пункті x, якщо в початковий момент $t=0$ вона починає дифундувати з початку координат $x=0$ вздовж осі абсцис з коефіцієнтом дифузії D і швидкістю течії C. У випадку дифузії без зносу $C=0$.

Нехай додатна випадкова змінна ξ з функцією розподілу ймовірностей $F(x)$ має відбиття

$$M(z)=\int_0^\infty x^{z-1}dF(x), \ 1-\alpha<Re\,z<1+\beta, \ (\alpha>0, \beta>0). \quad /6/$$

Тоді $M^2(z)$ є відбиттям добутку двох незалежних однаково розподілених випадкових змінних з функцією розподілу у вигляді ампліфікації

$$F(x)\Big|_\boxdot^2=F\boxdot F=\int_0^\infty F(x/y)\,dF(y). \qquad /7/$$

Якщо функція $M(z)$ не має нулів, то при довільному додатному t вираз

$$M^t(z)=e^{t\ln M(z)}, \qquad /8/$$

де $M(z)$ – головне значення логарифму, має сенс і є відбиттям континуальної ампліфікації порядку t, тобто випадкового процесу $F(x)\Big|_\boxdot^t$ з твірною функцією розподілу $F(x)$.

Зауважимо, що для абсолютно неперервної додатної випадкової змінної ξ з густиною $p(x)=F'(x)$ відповідно маємо відбиття

$$M(z)=\int_0^\infty x^{z-1}p(x)dx, \ 1-\alpha<Re\,z<1+\beta, \ (\alpha>0, \ \beta>0),$$

ампліфікацію густин

$$p(x)\Big|_\boxdot^2=\int_0^\infty p(x/y)\,p(y)(dy/y)$$

і густину випадкового процесу $p(x)\Big|_\boxdot^t$ з твірною густиною $p(x)$, [2].

Приклади. 1. Відбиття

$$M(z)=\frac{\nu}{z+\nu-1}\ ,\quad 1-\nu<\mathrm{Re}\,z$$

мономної змінної з густиною

$$p(x)=\nu x^{\nu-1},\quad 0<x<1,\ (\nu>0)$$

не має нулів. Отже,

$$M^t(z)=\left(\frac{\nu}{z+\nu-1}\right)^t,\quad t>0$$

є відбиттям випадкового процесу. За зворотною формулою

$$p(x)\Big|_{\ominus}^{t}=(\nu^t/\Gamma(t))x^{\nu-1}(\ln(1/x))^{t-1},\quad 0<x<1,\ (t>0,\ \nu>0). \qquad /9/$$

Процес з густиною /9/ є континуальною ампліфікацією порядку t з мономною твірною густиною.

2. Відбиття

$$M(z)=e^{c(z-1)+(1/2)D(z-1)^2},\quad -\infty<\mathrm{Re}\,z$$

логнормальної змінної з густиною

$$p(x)=\frac{1}{x\sqrt{2\pi D}}\ e^{-\frac{(\ln x-c)^2}{2D}},\ x>0,\qquad (-\infty<c<\infty,\ D>0)$$

не має нулів. Звідси

$$M^t(z)=e^{ct(z-1)+(1/2)Dt(z-1)^2},\quad t>0$$

є відбиттям випадкового процесу. За зворотною формулою

$$p(x)\Big|_{\ominus}^{t}=\frac{1}{x\sqrt{2\pi Dt}}\ e^{-\frac{(\ln x-ct)^2}{2Dt}},\ x>0,(t>0,-\infty<c<\infty,\ D>0). \qquad /10/$$

Процес з густиною /10/ є континуальною ампліфікацією порядку t з логнормальною твірною густиною.

3. Нехай параметр t у густині випадкового процесу $p(x)\Big|_{*}^{t}$ та $D(x)\Big|_{\ominus}^{t}$ – це значення додатної випадкової змінної τ з густиною $h(t)$. Тоді за формулою повної ймовірності випадкова континуальна згортка

$$p(x)\Big|_{*}^{\tau}=\int_0^{\infty}h(t)\,p(x)\Big|_{*}^{t}dt \qquad /11/$$

і випадкова континуальна ампліфікація

$$p(x)\Big|_{\ominus}^{\tau}=\int_0^{\infty}h(t)\,p(x)\Big|_{\ominus}^{t}dt \qquad /12/$$

представляють густину випадкового процесу з твірною густиною $p(x)$ і керуючою густиною $h(t)$.

Приклади. 1. Процес дифузії без зносу з перехідною густиною /5/ при $C = 0$, керований стійким процесом з показником $1/2$, за формулою /11/ є процесом Коші з перехідною густиною

$$\int_0^{\infty} \frac{\theta}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{\theta^2}{2t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{2Dt}} dt = \frac{\theta D}{\pi(\theta^2 D + x^2)}, \quad \theta > 0. \qquad /13/$$

2. Випадковий процес з перехідною густиною /10/ при $C = 0$, керований стійким процесом з показником $1/2$, за формулою /12/ є процесом логарифмічно Коші з перехідною густиною

$$\int_0^{\infty} \frac{\theta}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{\theta^2}{2t}} \frac{1}{x\sqrt{2\pi D t}} e^{-\frac{\ln^2 x}{2Dt}} dt = \frac{\theta\sqrt{D}}{\pi x(\theta^2 D + \ln^2 x)}, \quad \theta > 0. \qquad /14/$$

Таким чином, випадкова континуальна згортка /11/ і випадкова континуальна ампліфікація /12/ дають змогу будувати нові стохастичні процеси, вказавши твірний і керуючий.

1. К в і т І.Д. Випадкова континуальна згортка // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1973. Вип.8. С.20-29. 2. К в і т І.Д., К о с а р ч и н В.М. Випадкова континуальна ампліфікація // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1987. Вип.28. С.75-79.

Стаття надійшла до редколегії 29.06.87

УДК 536.12

Б.В.Ковальчук

ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ ОХОЛОДЖУЮЧОЇ ПЛАСТИНКИ З ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Розглянемо пластинку товщиною 2δ, яка містить чужорідне включення такої самої товщини і ширини $2h \leqslant 2\delta$. Система охолоджується від температури t_H до температури t_0.

Теплофізичні характеристики системи як єдиного цілого подаємо у вигляді

$$P(x) = P_1 + (P_0 - P_1) N(x), \qquad /1/$$

де P_1, P_0 – теплофізичні характеристики основного матеріалу і включення;

$$N(x) = S_-(x+h) - S_+(x-h);$$

$$S_\pm(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0, \\ 0{,}5 \pm 0{,}5, & \zeta = 0, \\ 0, & \zeta < 0. \end{cases}$$