Приклади. 1. Процес дифузії без зносу з перехідною густиною /5/ при $C = 0$, керований стійким процесом з показником $1/2$, за формулою /11/ є процесом Коші з перехідною густиною

$$\int_0^{\infty} \frac{\theta}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{\theta^2}{2t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{2Dt}} dt = \frac{\theta D}{\pi(\theta^2 D + x^2)}, \ \theta > 0. \qquad /13/$$

2. Випадковий процес з перехідною густиною /10/ при $C = 0$, керований стійким процесом з показником $1/2$, за формулою /12/ є процесом логарифмічно Коші з перехідною густиною

$$\int_0^{\infty} \frac{\theta}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{\theta^2}{2t}} \frac{1}{x\sqrt{2\pi Dt}} e^{-\frac{\ln^2 x}{2Dt}} dt = \frac{\theta\sqrt{D}}{\pi x(\theta^2 D + \ln^2 x)}, \ \theta > 0. \qquad /14/$$

Таким чином, випадкова континуальна згортка /11/ і випадкова континуальна ампліфікація /12/ дають змогу будувати нові стохастичні процеси, вказавши твірний і керуючий.

1. К в і т І.Д. Випадкова континуальна згортка // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1973. Вип.8. С.20-29. 2. К в і т І.Д., К о с а р ч и н В.М. Випадкова континуальна ампліфікація // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1987. Вип.28. С.75-79.

Стаття надійшла до редколегії 29.06.87

УДК 536.12

Б.В.Ковальчук

ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ ОХОЛОДЖУЮЧОЇ ПЛАСТИНКИ З ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Розглянемо пластинку товщиною 2δ, яка містить чужорідне включення такої самої товщини і ширини $2h \leqslant 2\delta$. Система охолоджується від температури t_H до температури t_0.

Теплофізичні характеристики системи як єдиного цілого подаємо у вигляді

$$P(x) = P_1 + (P_0 - P_1) N(x), \qquad /1/$$

де P_1, P_0 – теплофізичні характеристики основного матеріалу і включення;

$$N(x) = S_-(x+h) - S_+(x-h);$$

$$S_\pm(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0, \\ 0{,}5 \pm 0{,}5, & \zeta = 0, \\ 0, & \zeta < 0. \end{cases}$$

Оскільки включення тонке, то [2]

$$\lim_{h \to 0} (N(x)/2h) = \delta(x), \qquad /2/$$

де $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака.

З огляду на /2/ при $h \to 0$ коефіцієнти теплопровідності, тепловіддачі з поверхонь $z = \pm\delta$ і об"ємної теплоємності записуємо у вигляді

$$\lambda(x) = \lambda_1 + \Lambda_0(1 - K_\lambda)\delta(x),$$
$$\alpha(x) = \alpha_1 + A_0(1 - K_\alpha)\delta(x), \qquad /3/$$
$$C_v(x) = C_{v1} + R_0(C_0 - K_s C_1)\delta(x),$$

де введені позначення $\Lambda_0 = 2\lambda_0 h$, $A_0 = 2\alpha_0 h$, $R_0 = 2S_0 h$, $K_p = p_1/p_0$.

Підставляючи /3/ у рівняння теплопровідності неоднорідного тіла [1]

$$(\partial/\partial x)[\lambda(x)(\partial T/\partial x) - (\alpha(x)/\delta)T = C_v(x)\dot{T}, \qquad /4/$$

одержуємо диференціальне рівняння з сингулярними коефіцієнтами

$$(\partial^2 T/\partial x^2) + L(\partial T/\partial x)_* \delta'(x) - \varkappa_1^2 T - M T_* \delta(x) = (\dot{T}/a_1) + F\dot{T}_* \delta(x), \qquad /5/$$

де

$$L = (\Lambda_0/\lambda_1)(1 - K_\lambda), \quad M = (A_0/\delta\lambda_1)(1 - K_\alpha), \quad F = (R_0/\lambda_1)(C_0 - K_s C_1),$$

$$\varkappa_1^2 = (\alpha_1/\lambda_1\delta), \quad a_1 = \lambda_1/C_{v1}, \quad \delta'(x) = (d\delta(x))/dx, \quad \dot{T} = \partial T/\partial\tau,$$

$$T_* = (1/2)\left(T|_{x=0^+} + T|_{x=0^-}\right).$$

Застосуємо до /5/ перетворення Лапласа по τ. У результаті дістаємо

$$\bar{T}'' + L\bar{T}'_*\delta'(x) - \gamma_1^2\bar{T} = [(M + Fs)\bar{T}_* - Ft_H]\delta(x) - (t_H/a_1). \qquad /6/$$

Загальний розв"язок /6/ має вигляд

$$\bar{T} = -[(M + Fs)\bar{T}_* - Ft_H](e^{-\gamma_1|x|}/2\gamma_1) - L\bar{T}'_*(e^{-\gamma_1|x|}/2)\operatorname{sign} x + (t_H/a_1\gamma_1^2), \qquad /7/$$

де

$$\gamma_1 = \sqrt{(s/a_1) + \varkappa_1^2}.$$

Після диференціювання /7/ по x знаходимо значення $\bar{T}_*$ і $\bar{T}'_*$. Тоді розв"язок /7/ записуємо у вигляді

$$\bar{T}=\frac{t_H}{a_1\gamma_1^2}\left(1+\frac{Fa_1\varkappa_1^2-M}{2\gamma_1^2+Fs+M}e^{-|x|\gamma_1}\right)\frac{t_H}{a_1}\left\{\gamma_1^{-2}+(Fa_1\varkappa_1^2-M)e^{-|x|\gamma_1}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{\gamma_1^2(Fs+M)}+\frac{4}{F^3\psi(s)}-\frac{2}{F^2\gamma_1\lambda(s)}\right]\right\}, \qquad /8/$$

де

$$\psi(s)=(s-s_3)\chi(s);\ \chi(s)=(s-s_1)(s-s_2);\ s_3=-(M/F);$$

$$s_{1,2}=((2/a_1F)-M)(1/F)\pm(2/a_1F^2)\sqrt{1-Fa_1(M-Fa_1\varkappa_1^2)}.$$

Переходячи тепер у /8/ від зображень до оригіналів, одержуємо

$$T=t_H\left\{e^{-Mi_1}erf(|x|/2\sqrt{a_1\tau})+\varphi^+(|x|,\tau,s_3,w_3)+(4/F^2)w_3^2\times\right.$$

$$\left.\times\left[\sum_{i=1}^{3}\frac{\varphi^+(|x|,\tau,s_i,w_i)}{\psi_s'(s_i)}-\frac{F}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\varphi^-(|x|,\tau,s_i,w_i)}{w_i\chi_s'(s_i)}\right]\right\}, \qquad /9/$$

де

$$\varphi^{\pm}(|x|,\tau,s_i,w_i)=(e^{s_i\tau}/2)[e^{-|x|w_i}erfc((|x|/2\sqrt{a_1\tau})-\sqrt{a_1\tau}\,w_i)\pm$$

$$\pm e^{|x|w_i}erfc((|x|/2\sqrt{a_1\tau})+\sqrt{a_1\tau}\,w_i)],\ w_i=\sqrt{\varkappa_1^2+(s_i/a_1)},\ Mi_1=(\alpha_1/C_{v1}\delta);$$

$erfc\,z=1-erf\,z$; $erf\,z$ – інтеграл ймовірності.

У безрозмірних величинах і параметрах розв"язок /9/ має вигляд

$$\theta=e^{-Mi_1}erf(|X|/2\sqrt{F_0})+\varphi^+(|X|,F_0\,S_3,\Omega_3)+(4/f^2)\Omega_3^2\times$$

$$\left[\sum_{i=1}^{3}\frac{\varphi^+(|X|,F_0,S_i,\Omega_i)}{\psi_s'(S_i)}-\frac{f}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\varphi^-(|X|,F_0,S_i,\Omega_i)}{\Omega_i\chi_s'(S_i)}\right], \qquad /10/$$

де

$$X=x/\delta;\ F_0=(a_1\tau/\delta^2);\ \Omega_i=\sqrt{Bi_1+S_i};$$

$$Bi_1=(\alpha_1\delta/\lambda_1);\ S_i=S_i(\delta^2/a_1);\ S_3=-(m/f);$$

$$S_{1,2}=((2/f)-m)(1/f)\pm(2/f^2)\sqrt{1-f(m-fBi_1)};$$

$$f=Fa_1/\delta=(2\beta/K_s)(K_c^{-1}-K_s)=2\beta((1/K_{cv})-1);\ K_{cv}=C_{v1}/C_{v0};$$

$$m=M\delta=((2Bi_0\beta)/K_\lambda)(1-K_\alpha);\ \beta=h/\delta;\ Bi_0=(\alpha_0\delta/\lambda_0);$$

$$\varphi^{\pm}(|x|,F_0,S_i,\Omega_i)=(e^{S_iF_0}/2)[e^{-|X|\Omega_i}erfc((|X|/2\sqrt{F_0})-\Omega_i\sqrt{F_0})\pm$$

$$\pm e^{|X|\Omega_i}erfc((|X|/2\sqrt{F_0})+\Omega_i\sqrt{F_0})].$$

При $F_0=0, X=0$ маємо $\theta=1$. А при $F_0>0$, $X=0$ одержуємо

$$\theta=\frac{4}{f^2}\Omega_3^2\left[\frac{e^{s_1F_0}}{(s_1-s_2)(s_1-s_3)}-\frac{e^{s_2F_0}}{(s_1-s_2)(s_2-s_3)}+\frac{e^{s_3F_0}}{(s_1-s_3)(s_2-s_3)}\right]-$$
$$-\frac{fe^{s_1F_0}}{2\Omega_1(s_1-s_2)}\operatorname{erf}(\Omega_1\sqrt{F_0})+\frac{fe^{s_2F_0}}{2\Omega_2(s_1-s_2)}\operatorname{erf}(\Omega_2\sqrt{F_0}). \qquad /11/$$

1. К о л я н о Ю.М., К у л и к А.Н. Температурные напряжения от объемных источников. К., 1983. 2. К о р н Г., К о р н Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1968.

Стаття надійшла до редколегії 23.03.87

УДК 517.514

Л.М.Лісевич

ДЕЯКІ УЗАГАЛЬНЕННЯ ЛЕМИ ДЕМИДОВИЧА

Лема Демидовича [1]. Якщо функція $\varphi(x)$ неперервна та обмежена на $[x_0,+\infty[$ /або на $]-\infty, x_0]$ /, то, яке б не було число τ, можна вказати послідовність $x_n(\tau)\to+\infty$ /або $x_n(\tau)\to-\infty$/ таку, коли

$$\lim_{n\to\infty}(\varphi(x_n+\tau)-\varphi(x_n))=0. \qquad /1/$$

Розглянемо деякі наслідки, які випливають з цієї леми.

Наслідок 1. Якщо функція $\varphi(x,y)$ неперервна й обмежена на $[x_0,+\infty[$ /або $]-\infty, x_0]$ /, визначена та неперервна для всіх $y\in Y$ рівномірно відносно x, то, яке б не було число τ, можна вказати послідовність $x_n(\tau)\to+\infty$ /або $x_n(\tau)\to-\infty$/, коли

$$\lim_{n\to\infty}(\varphi(x_n+\tau,y)-\varphi(x_n,y))=0 \qquad /2/$$

рівномірно відносно $y\in Y$.

Доведення наслідку випливає безпосередньо з нерівності

$$|\varphi(x_n+\tau,y)-\varphi(x_n,y)|\leqslant|\varphi(x_n,y)-\varphi(x_n,y_0)|+|\varphi(x_n+\tau,y)-$$
$$-\varphi(x_n+\tau,y_0)|+|\varphi(x_n+\tau,y_0)-\varphi(x_n,y_0)|,$$

де $y_0\in Y$.