

При $F_0 = 0, X = 0$ маємо $\theta = 1$. А при $F_0 > 0, X = 0$ одержуємо

$$\theta = \frac{4}{f^2} \Omega_3^2 \frac{e^{s_1 F_0}}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)} - \frac{e^{s_2 F_0}}{(s_1 - s_2)(s_2 - s_3)} + \frac{e^{s_3 F_0}}{(s_1 - s_3)(s_2 - s_3)} - \frac{f e^{s_1 F_0}}{2 \Omega_1 (s_1 - s_2)} \operatorname{erf}(\Omega_1 \sqrt{F_0}) + \frac{f e^{s_2 F_0}}{2 \Omega_2 (s_1 - s_2)} \operatorname{erf}(\Omega_2 \sqrt{F_0}). \quad /11/$$

1. К о л я н о Ю.М., К у л и к А.Н. Температурные напряжения от объемных источников. К., 1983. 2. К о р н Г., К о р н Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1968.

Стаття надійшла до редколегії 23.03.87

УДК 517.514

Л.М. Лісевич

ДЕЯКІ УЗАГАЛЬНЕННЯ ЛЕМИ ДЕМИДОВИЧА

Лема Демидовича [1]. Якщо функція $\varphi(X)$ неперервна та обмежена на $[X_0, +\infty[$ /або на $]-\infty, X_0]$ /, то, яке б не було число τ , можна вказати послідовність $X_n(\tau) \rightarrow +\infty$ /або $X_n(\tau) \rightarrow -\infty$ /, таку, коли

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi(X_n + \tau) - \varphi(X_n)) = 0. \quad /1/$$

Розглянемо деякі наслідки, які випливають з цієї леми.

Наслідок 1. Якщо функція $\varphi(X, y)$ неперервна й обмежена на $[X_0, +\infty[$ /або $]-\infty, X_0]$ /, визначена та неперервна для всіх $y \in Y$ рівномірно відносно X , то, яке б не було число τ , можна вказати послідовність $X_n(\tau) \rightarrow +\infty$ /або $X_n(\tau) \rightarrow -\infty$ /, коли

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi(X_n + \tau, y) - \varphi(X_n, y)) = 0 \quad /2/$$

рівномірно відносно $y \in Y$.

Доведення наслідку випливає безпосередньо з нерівності

$$|\varphi(X_n + \tau, y) - \varphi(X_n, y)| \leq |\varphi(X_n, y) - \varphi(X_n, y_0)| + |\varphi(X_n + \tau, y) - \varphi(X_n + \tau, y_0)| + |\varphi(X_n + \tau, y_0) - \varphi(X_n, y_0)|,$$

де $y_0 \in Y$.

Наслідок 2. Якщо функція $f(x, y)$ по кожній змінній x, y задовольняє умови наслідку 1, то, яке б не було число τ , знайдуться дві послідовності $x_n(\tau) \rightarrow +\infty$ і $y_n(\tau) \rightarrow +\infty$, коли

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n + \tau, y_n + \tau) - f(x_n, y_n)) = 0.$$

Доведення наслідку 2 випливає з нерівності

$$|f(x_n + \tau, y_n + \tau) - f(x_n, y_n)| \leq |f(x_n + \tau, y_n + \tau) - f(x_n, y_n + \tau)| + |f(x_n, y_n + \tau) - f(x_n, y_n)|.$$

Приклад.

$$f(x, y) = \sin x + \cos y; \quad \tau = \pi; \quad x_n = n\pi; \quad y_n = ((2n+1)/2)\pi.$$

Наслідок 3. Нехай $\{\psi_k(x)\}$, $k = 1, 2, \dots, m$ - система рівномірно обмежених і рівностепенно неперервних на $[x_0, +\infty[$, /або на $]-\infty, x_0]$ / функцій. Тоді, яке б не було число τ , можна вказати систему послідовностей $\{x_n^{(k)}(\tau)\} \rightarrow +\infty$ / або $\{x_n^{(k)}(\tau)\} \rightarrow -\infty$ /, $k = 1, m$, коли

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m (\psi_k(x_n^{(k)} + \tau) - \psi_k(x_n^{(k)})) = 0. \quad /3/$$

Доведення наслідку 3 безпосередньо випливає з леми Демидовича.

Узагальнимо тепер лему Демидовича на випадок функцій з простору S^p /простору Степанова/, що в сукупністю сумовних разом з p -м степенем ($p \geq 1$) у кожному скінченному інтервалі функцій, пов'язаних метрикою

$$D_{S^p}\{f(x), g(x)\} = \sup_{-\infty < x < +\infty} \left\{ \int_x^{x+1} |f(t) - g(t)|^p dt \right\}^{1/p}.$$

Теорема. Якщо дійсна функція $f(x) \in S^p$ - обмежена та S^p - неперервна на $[x_0, +\infty[$, то, які не були б числа τ і $h > 0$, можна вказати послідовність $x_n(\tau) \rightarrow +\infty$, коли $x_n > X > x_0$

$$\sup_{x_n > X} \left| \int_{x_n}^{x_n+1} (f(t+\tau) - f(t)) dt \right| < h. \quad /4/$$

Доведення. Припустимо, що теорема неправильна. Тоді знайдуться такі числа τ_0 і h_0 , коли для $x_n > X > x_0$, ($h_0 > 0$)

$$\left| \int_{x_n}^{x_n+1} (f(t+\tau_0) - f(t)) dt \right| \geq h_0. \quad /5/$$

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що

$$\int_{x_n}^{x_n+1} (f(t+\tau_0) - f(t)) dt \geq h_0 \quad /6/$$

або

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} (f(t+\tau_0) - f(t)) dt \leq -h_0. \quad /7/$$

Нехай має місце нерівність /6/. Тоді для $x > X$ і $n > N$

$$\begin{aligned} \int_x^{x+1} (f(t+n\tau_0) - f(t)) dt &= \int_x^{x+1} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} [f(t+(k+1)\tau_0) - f(t+k\tau_0)] \right\} \cdot \\ &\cdot dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x+k\tau_0}^{x+k\tau_0+\tau_0} [f(t+\tau_0) - f(t)] dt. \end{aligned} \quad /8/$$

Прийнявши тепер $x_k = x + k\tau_0$, $k=0, 1, \dots, n-1$, на основі /6/ з /8/ отримуємо

$$\int_x^{x+1} [f(t+n\tau_0) - f(t)] dt \geq nh_0. \quad /9/$$

Далі, застосовуючи в /9/ нерівності Гальдера та Мінковського, маємо

$$nh_0 \leq \left(\int_x^{x+1} |f(t+n\tau_0) - f(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \left(\int_x^{x+1} |f(t+n\tau_0)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_x^{x+1} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Оскільки $h_0 > 0$ і $n > N$, то остання нерівність суперечить тому, що $f(x) \in S^p$ - обмежена. Отримана суперечність доводить теорему.

Наслідок 4. Якщо функція $f(x, y) \in S^p$ - обмежена та S^p - неперервна на $[x_0, +\infty[$ по x рівномірно відносно $y \in Y$, а також неперервна по $y \in Y$, то, які б не були числа τ і $h > 0$, можна вказати послідовність $x_n(\tau) \rightarrow +\infty$, коли для $x_n > X > x_0$

$$\sup_{x_n > X} \left| \int_{x_n}^{x_{n+1}} [f(t+\tau, y) - f(t, y)] dt \right| < h$$

рівномірно відносно $y \in Y$.

Наслідок 5. Якщо система дійсних функцій $\{\psi_k(x)\}$, $k=1, 2, \dots, m$ рівномірно S^p - обмежена та рівностепенно S^p - неперервна на $[x_0, +\infty[$, то, які б не були числа τ і $h > 0$, можна вказати таку систему послідовностей $\{x_n^{(k)}(\tau)\}$, $k=1, 2, \dots, m$, коли для $x_n^{(k)} > X > x_0$

$$\sup_{x_n^{(k)} > X} \sum_{k=1}^m \left| \int_{x_n^{(k)}}^{x_{n+1}^{(k)}} [\psi_k(t+\tau) - \psi_k(t)] dt \right| < h.$$

Зауваження. Доведена теорема та її наслідки 4, 5 правильні й для випадку проміжка $]-\infty, x_0]$.

1. Демидович Б.П. Почти периодичность решения обыкновенного дифференциального уравнения // Успехи мат. наук. 1953. Т.8. Вып. 6. 58. С. 103-106. 2. Кованько О.С., Лисевич Л.М. Деякі граничні співвідношення для S^p - обмежених функцій // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1969. Вып. 4. С.25-28.

Стаття надійшла до редколегії 20.04.87

УДК 517.944:947

Марія Д.Мартиненко

ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНО СПАДНІ РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Визначення втрат частинок у прискорювачах пов'язано з розв'язком такого лінійного параболічного рівняння другого порядку [1]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (1+x) \frac{\partial W}{\partial x} + W. \quad /1/$$

Для розробки чисельних алгоритмів розв'язування /1/ важливе значення мають явні аналітичні розв'язки. Наведемо такі розв'язки, що зображаються у вигляді інтегралів від елементарних функцій і експоненціально спадають при $t \rightarrow +\infty$.

Розв'язки /1/ шукаємо у вигляді

$$W(x, t) = u(x) e^{-\lambda t}, \quad /2/$$

де $\lambda > 0$ - стала; $u(x)$ - невідома обмежена функція.

Підставляючи /2/ в /1/, дістаємо для її визначення таке рівняння:

$$lu \equiv x \frac{d^2 u}{dx^2} + (1+x) \frac{du}{dx} + (1+\lambda)u = 0. \quad /3/$$

Розв'язок /3/ шукаємо у вигляді інтегралу

$$u(x) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-x\tau} y(\tau) d\tau, \quad /4/$$

де α, β - сталі, а $y(\tau)$ - невідома функція, які визначимо далі. Підставляючи /4/ у /3/, після нескладних перетворень запишемо

$$lu(x) = - \left[(\tau^2 - \tau) y(\tau) e^{-x\tau} \right]_{\tau=\alpha}^{\tau=\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} e^{-x\tau} \left\{ \frac{d}{d\tau} [(\tau^2 - \tau) y(\tau)] - \right. \\ \left. - [\tau - (1+\lambda)] y(\tau) \right\} d\tau = 0. \quad /5/$$