Зауваження. Доведена теорема та її наслідки 4, 5 правильні й для випадку проміжка $]-\infty, x_0]$.

1. Демидович Б.П. Почти периодичность решения обыкновенного дифференциального уравнения // Успехи мат. наук. 1953. Т.8. Вып. 6. 58. С. 103-106. 2. Praнько О.С., Лісевич Л.М. Деякі граничні співвідношення для S^p - обмежених функцій // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1969. Вып. 4. С.25-28.

Стаття надійшла до редколегії 20.04.87

УДК 517.944:947

Марія Д. Мартиненко

ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНО СПАДНІ РОЗВ"ЯЗКИ ОДНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Визначення втрат частинок у прискорювачах пов"язано з розв"язком такого лінійного параболічного рівняння другого порядку [1]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (1+x)\frac{\partial W}{\partial x} + W. \qquad /1/$$

Для розробки чисельних алгоритмів розв"язування /1/ важливе значення мають явні аналітичні розв"язки. Наведемо такі розв"язки, що зображаються у вигляді інтегралів від елементарних функцій і експоненціально спадають при $t \to +\infty$.

Розв"язки /1/ шукаємо у вигляді

$$W(x,t) = u(x)e^{-\lambda t}, \qquad /2/$$

де $\lambda > 0$ - стала; $u(x)$ - невідома обмежена функція. Підставляючи /2/ в /1/, дістаємо для її визначення таке рівняння:

$$lu \equiv x\frac{d^2u}{dx^2} + (1+x)\frac{du}{dx} + (1+\lambda)u = 0. \qquad /3/$$

Розв"язок /3/ шукаємо у вигляді інтегралу

$$u(x) = \int_\alpha^\beta e^{-x\tau} y(\tau)\, d\tau, \qquad /4/$$

де α, β - сталі, а $y(\tau)$ - невідома функція, які визначимо далі. Підставляючи /4/ у /3/, після нескладних перетворень запишемо

$$Lu(x) \equiv -\left[(\tau^2-\tau)y(\tau)e^{-x\tau}\right]_{\tau=\alpha}^{\tau=\beta} + \int_\alpha^\beta e^{-x\tau}\left\{\frac{d}{d\tau}\left[(\tau^2-\tau)y(\tau)\right] - \left[\tau-(1+\lambda)\right]y(\tau)\right\}d\tau = 0. \qquad /5/$$

З /5/ випливає, що /4/ даватиме розв"язок /3/, коли

$$\left[(\tau^2-\tau)y(\tau)e^{-x\tau}\right]_{\tau=\alpha}^{\tau=\beta}=0, \qquad /6/$$

$$\frac{d}{d\tau}\left[(\tau^2-\tau)y(\tau)\right]-\left[\tau-(1+\lambda)\right]y(\tau)=0. \qquad /7/$$

З /7/ маємо

$$y(\tau)=C\,\frac{|\tau-1|^{1+\lambda}}{\tau^{\lambda}}. \qquad /8/$$

Рівняння /6/ перетворюється в тотожність при $\alpha=0, \beta=1$ або $\alpha=1$, $\beta=\infty$ /при $x\tau>0$ / і т.д. Отже, шуканий розв"язок /1/ при $\alpha=0$, $\beta=1$ матиме вигляд

$$W(x,t)=Ce^{-\lambda t}\int_0^1 e^{-x\tau}\left((1-\tau)/\tau^{\lambda}\right)dt. \qquad /9/$$

Наявний у /9/ інтеграл в елементарних функціях не зображується. Зобразимо його через функцію Куммера [2] $M(a,c,x)={}_1F_1(a,c,x)$ /де ${}_1F_1(a,c,x)$ – вироджена гіпергеометрична функція/, а /9/ запишемо у такому вигляді:

$$W(x,t)=C\,\frac{\lambda(1+\lambda)\pi}{\sin\lambda\pi}\,e^{-\lambda t}M(1-\lambda;3,-x). \qquad /10/$$

Формула /9/ показує, що експоненціальні розв"язки /1/, зображені у вигляді /2/, існують тільки при $0<\lambda<1$. Сталу C можна визначити з такої умови: якщо $x\in[a,b]$, $t\in[0,T]$ і $W_0=const$, то

$$W_0=\int_a^b\int_0^T\left[W(x,t)\right]^2dx\,dt.$$

Із зробленого аналізу випливає, що при $x>0$ розв"язками /1/ є також і функції

$$W(x,t)=Ce^{-\lambda t}\int_0^{\infty}e^{-x\tau}\left(|\tau-1|^{1+\lambda}/t^{\lambda}\right)d\tau=Ce^{-\lambda t}\left[\int_0^1 e^{-x\tau}\left((1-\tau)/\tau^{\lambda}\right)d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_1^{\infty}e^{-x\tau}\left((\tau-1)^{1+\lambda}/\tau^{\lambda}\right)d\tau\right],$$

$$W(x,t)=Ce^{-\lambda t}\int_1^{\infty}e^{-x\tau}\left((\tau-1)^{1+\lambda}/\tau^{\lambda}\right)d\tau. \qquad /12/$$

Для збіжності інтегралу в /11/ слід припустити, що $x>0$, $0<\lambda<1$. Водночас це обмеження не істотне для розв"язку, зображуваного формулою /12/; тоді слід вважати $\lambda>0$.

На закінчення відзначимо, що виражаючи інтеграли /9/, /11/ і /12/ через спеціальні функції, можна отримати експоненціально спадні розв"язки /1/ і при значеннях λ , відмінних від вказаних вище.

1. Каган Б.М., Тер-Микаэлян Т.М. Решение интегральных задач на ЦВМ. М., 1964. 2. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., 1981.

Стаття надійшла до редколегії 17.09.84

УДК 512.546

І.Й.Гуран

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ АРХАНГЕЛЬСЬКОГО

Нехай T - нескінчена множина, $X(T)$ - група всіх бієкцій множини T на себе. Групу $X(T)$ розглядатимемо як топологічну в топології поточкової збіжності. Наведемо деякі властивості топологічної групи $X(T)$:

а/ $X(T)$ - тотально мінімальна, повна в розумінні Райкова топологічна група [2];

б/ $X(T)$ - немає групового поповнення.

Твердження. $X(T)$ - топологічно проста топологічна група.

Доведення. Нехай N - не тривіальна замкнена підгрупа в групі $X(T)$. Підгрупа $SX(T)=\{f\in X(T): supp f < \omega\}$ - всюди щільна в групі $X(T)$ і мінімальна [2]. З критерію Стефенсона - Банашевського випливає, що $N\cap SX(T)\neq\{e\}$. Отже, група N містить елемент, відмінний від тотожного, який рухає лише скінченне число елементів множини T , а тому $N\supseteq S(T)$.

Теорема 1. Нехай топологічна група володіє підгруповою базою околів нейтрального елемента. Тоді вона топологічно ізоморфна деякій підгрупі групи $X(T)$.

З твердження теореми і властивості а/ випливає, що довільна топологічна група, яка володіє підгруповою базою околів одиниці, вкладається в тотально мінімальну топологічну групу. Цей факт узагальнює теорему Діерольф та Шваненгеля [3]. Як частковий випадок отримуємо: добуток дискретних груп, наприклад $\mathbb{Z}^{\omega_1}$, вкладається в групу $X(\omega_1)$.