А.В.Архангельський сформулював таку [1] задачу. Чи кожна топологічна група може бути вкладена в добуток секвенціальних груп?

Теорема 2. Для кожного кардинала $\tau > \omega$ група $X(\tau^+)$ не вкладається в добуток груп тісноти, що не перевищує τ.

Доведення. Припустимо, що $X(\tau^+) \subset \prod G_\alpha$, $t(G_\alpha) \leq \tau$. Розглянемо ядро нетривіальної проекції $\pi_\alpha : X(\tau^+) \to G_\alpha$. Це замкнена нормальна підгрупа групи $X(T)$. Але група $X(T)$ – топологічно проста, тому π_α – ізоморфне ущільнення групи $X(\tau^+)$ в G_α. З мінімальності групи $X(\tau^+)$ випливає, що π_α – вкладення. Однак $t(X(\tau^+)) \geq t(Z^{\tau^+}) = \tau^+ > \tau$. З отриманого протиріччя одержуємо твердження теореми.

Отже, відповідь на питання А.В.Архангельського негативна.

1. Архангельский А.В. Классы топологических групп // Успехи мат. наук. 1981. Т.36. Вып. 3. С. 127-146.
2. Dierolf S., Schwanengel U. Un example d'un groupe topologique q-minimal mais non précompact // Bull. Sc. math. 1977. Vol. 101. p. 265-269. 3. Dierolf S., Schwanengel U. Examples of locally compact non-compact minimal topological groups // Pacif. J. Math. 1979. Vol.82. N2. p.349-355.

Стаття надійшла до редколегії 15.04.87

УДК 517.947

О.Л.Горбачук

ПРО ПОВЕДІНКУ РОЗВ"ЯЗКІВ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ З САМОСПРЯЖЕНИМ ОПЕРАТОРОМ

Відомо [2], що задача Коші для рівняння $(dy(t))/(dt) = Ay(t)$, $t \in [0, \infty)$, $y(0) = y_0$, A – обмежений оператор в банаховому просторі має розв"язок при довільному y_0 з банахового простору. Причому розв"язок рівняння $y(t) = e^{At} y_0$ – ціла функція, тобто такий розв"язок продовжується до аналітичної функції, заданої на всій комплексній площині. Розглянемо еволюційне рівняння з самоспряженим оператором і встановимо, що довільний розв"язок такого рівняння продовжується до аналітичної функції, заданої у відкритій правій півплощині.

Вектор y із банахового простору називається аналітичним /цілим/ вектором оператора A, якщо $y \in D(A^n)$ $(D(A^n))$ –

область визначення оператора $A^n)$ і ряд

$$\|y\|+(\|Ay\|/1!)t+(\|A^2y\|/2!)t^2+\cdots+(\|A^ny\|/n!)t^n+\cdots$$

збігається при деякому $t>0$ /довільних t /.

Лема. Розв"язок рівняння $(dy(t))/(dt)=Ay(t),\ t\in[0,\infty)$, де A - додатний самоспряжений оператор у гільбертовому просторі продовжується до цілої функції.

Доведення. Згідно з представленням [1] розв"язок такого рівняння $y(t)e^{At}y_0$, де $y_0=y(0)$ - цілий вектор оператора A . Із означення цілого вектора випливає, що розв"язок $y(t)$ - ціла функція.

Теорема. Розв"язок рівняння $(dy/dt)=Ay(t),\ t\in[0,\infty)$, де A - самоспряжений оператор продовжується до аналітичної функції, визначеної у відкритій правій площині.

Доведення. Нехай $A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE_\lambda$ - спектральний розклад самоспряженого оператора. Приймемо $A_+=\int_0^{\infty}\lambda dE_\lambda$ і $A_-=\int_{-\infty}^{0}\lambda dE_\lambda$. Розглянемо два ортогональні проектори

$$P_+=\int_0^{\infty}dE_\lambda=E-E_0,\quad P_-=\int_{-\infty}^{0}dE_\lambda=E_0.$$

Гільбертовий простір H , в якому задано оператор A , розбивається в ортогональну суму підпросторів $H_+=P_+H'$ і $H_-=P_-H$. Позначимо через $x_+=P_+x$ і $x_-=P_-x$. На H_+ оператор A збігається з A_+, а на H_- з A_- . Оператор A_+ на H_+ додатний, а на H_- нульовий. Відповідно оператор A_- на H_+ нульовий, а на H_- - від"ємний.

Рівняння $(dy(t))/(dt)=Ay(t)$ розпадається на два диференціальні рівняння

$$(dy_+(t))/(dt)=A_+y_+(t) \qquad /1/$$

у просторі H_+ ,

$$(dy_-(t))/(dt)=A_-y_-(t) \qquad /2/$$

у просторі H_-

$$y(t)=y_+(t)+y_-(t).$$

Неважко перевірити, що множина цілих і аналітичних векторів операторів A і A_+ - відповідно збігаються. Оскільки оператор A_+ - додатний самоспряжений, то за лемою функція $y_+(t)$ продовжується до цілої.

Розв"язок рівняння /2/ $y_-(t)=e^{A_-t}z_0$,
де z_0 - коаналітичний вектор /цей розв"язок аналітичний на

півосі $(0, \infty)$. На від"ємну піввісь розв"язок взагалі не продовжується /приклад такого розв"язку можна побудувати/, згідно з представленням функція $y_-(t)$ аналітична у відкритій правій площині. Оскільки розв"язок $y(t)=y_+(t)+y_-(t)$, то теорема доведена.

1. Горбачук Е.Л. Представление решений эволюционных уравнений // IX школа по теории операторов в функциональных пространствах. Тернополь. 1984. 2. Данфорд Н., Шварц Д. Линейные операторы, общая теория. М., 1962.

Стаття надійшла до редколегії 15.04.87