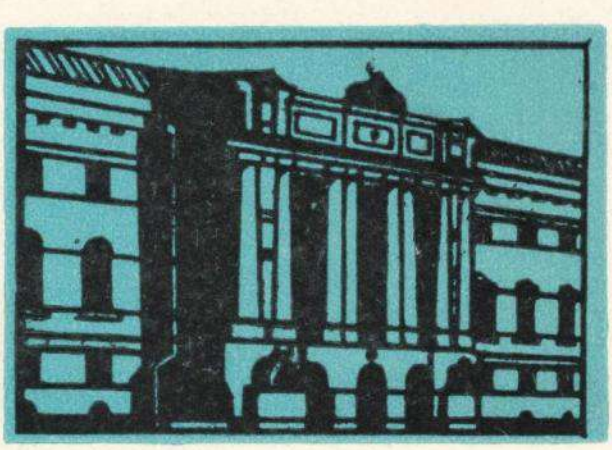
ISSN 0201-758X
ISSN 0320-6572

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

ПРИКЛАДНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

СЕРІЯ
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА
ВИПУСК
30
1988



МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Виходить з 1965 р.

ВИПУСК 30

ПРИКЛАДНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ЛЬВІВ
ВИДАВНИЦТВО ПРИ ЛЬВІВСЬКОМУ
ДЕРЖАВНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ
ВИДАВНИЧОГО ОБ'ЄДНАННЯ
«ВИЩА ШКОЛА»
1988

УДК 513

В Вестнике помещены статьи по теории функций, алгебре, топологии, теории вероятностей, дифференциальным и интегральным уравнениям и их приложениям.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов. Библиогр. списки в конце статей.

Адреса редакційної колегії: 290000, Львів-центр, вул. Університетська, I, кафедра диференціальних рівнянь.

Редакція науково-технічної та природничої літератури
Зав.редакцією М.П.П а р ц е й

В $\frac{1702050000-007}{М225/04/-88}$ Заказное

УДК 517.954

С.П.Лавренюк

ІСНУВАННЯ РОЗВ"ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТИПУ ПОПЕРЕЧНИХ КОЛИВАНЬ СТЕРЖНЯ З ВИРОДЖЕННЯМ

Розглянемо задачу Коші

$$Lu \equiv p(x,t)u_{tt} + (a_0(x,t)u_{xx})_{xx} + a_1(x,t)u_{xx} + a_2(x,t)u_{xt} +$$

$$+ a_3(x,t)u_x + a_4(x,t)u_t + a_5(x,t)u = f(x,t), \qquad /1/$$

$$(x,t) \in Q_T = \{x \in \mathbb{R},\ 0 < t < T\},$$

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = 0. \qquad /2/$$

Припускаємо, що $\dfrac{\partial^{k+l+1} a_0}{\partial t^{k+1} \partial x^l}$, $\dfrac{\partial^{k+l} a_i}{\partial t^k \partial x^l}$, $(i = 1,\dots,5;\ l + 2k \leqslant 6)$ неперервні й обмежені в $\overline{Q}_T$. Крім того, нехай у $\overline{Q}_T$ виконуються нерівності $p(x,t) > 0$ при $t > 0$; $p(x,t) \geqslant \mu_1 t$ при $t \geqslant 0$;

$$\left|\frac{\partial^{k+l} p}{\partial t^k \partial x^l}\right| \leqslant C_1, \quad 2k + l \leqslant 6; \ a_0(x,t) \geqslant A > 0.$$

Позначимо через Φ_2^2 простір функцій $f(x,t)$, для яких величина

$$B_2^2 = F^2(\gamma_0, 3) + F_1^1(\gamma_0, 1) + F_2(\gamma_0, -1)$$

скінченна. Тут

$$F_k^l(\gamma_0, s) = \sup_{t \in [0,T]} \int_{D_t} \sum_{i=1}^{l} \left(\frac{\partial^{k+i} f(x,t)}{\partial t^k \partial x^i}\right)^2 t^{-\gamma_0 - \delta_0 - s}\, dx,$$

$$D_t = \{x \in \mathbb{R},\ t = const\},\ \delta_0 > 0,$$

$$\gamma_0 = (1/\mu_1)\max\{0; \sup_{Q_{\tau_0}}(p_t + a_{2x} - 2a_4) + \delta_0; \sup_{Q_{\tau_0}}(3p_t + a_{2x} - 2a_4) + \delta_0\}.$$

Число τ_0 $(0 < \tau_0 \leqslant 1)$ обираємо так, щоб γ_0 було найменшим. Введемо у просторі Φ_2^2 норму згідно з формулою

$$\|f\|_{2,2} = \sqrt{B_2^2}\,.$$

Розглянемо простір функцій $H^{2m,m}(Q_T)$ з нормою

$$\|u\|_{H^{2m,m}(Q_T)}=\Big(\int_{Q_T}\sum_{2k+l\le 2m}\big((\partial^{k+l}u(x,t))/(\partial t^k\partial x^l)\big)^2dx\,dt\Big)^{1/2}.$$

Теорема. Якщо $f(x,t)\in\Phi_2^2$ і виконуються всі наведені умови для коефіцієнтів /1/, то задача /1/, /2/ має розв"язок $u(x,t)\in H^{4,2}(Q_T)$ і для нього справедлива нерівність

$$\|u\|_{H^{4,2}(Q_T)}\le C_2\|f\|_{2,2}. \qquad /3/$$

Якщо, крім того, $\gamma_0\le 1$, то розв"язок задачі /1/, /2/ єдиний.

Доведення. Нехай $\varepsilon>0$ достатньо мале число. Виберемо послідовність функцій $f_m(x,t)$ таких, що

$$B^6_{m,4}=F^6_m(\gamma_0,7)+F^4_{m,1}(\gamma_0,5)+F^2_{m,2}(\gamma_0,3)+F_{m,3}(\gamma_0,1)+$$
$$+F_{m,4}(\gamma_0,-1)<\infty$$

і $f_m(x,t)$ збігається до $f(x,t)$ у просторі Φ_2^2 при $m\to\infty$. Розглянемо задачі

$$Lu^\varepsilon_m=f_m(x,t),\quad (x,t)\in Q_{\varepsilon T}, \qquad /4/$$

$$u^\varepsilon_m(x,\varepsilon)=0,\quad u^\varepsilon_{mt}(x,\varepsilon)=0, \qquad /5/$$

де $Q_{\varepsilon T}=\{x\in\mathbb{R},\ \varepsilon<t<T\}$.

Внаслідок зроблених припущень розв"язок задачі /4/, /5/ існує [2] для довільного $\varepsilon>0$ і $m=1,2,\dots$, причому $u^\varepsilon_m(x,t)\in H^{6,3}(Q_T)$. Використовуючи методику праці [2], одержуємо оцінку розв"язку $u^\varepsilon_m(x,t)$:

$$\|u^\varepsilon_m\|^2_{H^{6,3}(Q_{\varepsilon T})}\le C_3B^6_{m,4}. \qquad /6/$$

Тут стала C_3 не залежить від ε, m і функції $f_m(x,t)$.

Продовжуємо функцію $u^\varepsilon_m(x,t)$ в область $\{x\in\mathbb{R},-T+2\varepsilon<t<\varepsilon\}$, використовуючи відомий метод [1]. Для продовженої функції, яку позначимо $u^\varepsilon_m(x,t)$, справедлива оцінка /6/ в області Q_T. Оскільки обмежена в $H^{6,3}(Q_T)$ множина функцій $\{u^\varepsilon_m(x,t)\}$ /при кожному фіксованому m / є компактною в $H^{4,2}(Q_T)$, то існує послідовність

$$\{u^{\varepsilon_k}_m(x,t)\}\subset\{u^\varepsilon_m(x,t)\},$$

збіжна до деякої функції $u_m(x,t)\in H^{4,2}(Q_T)$ при $\varepsilon_k\to 0$.

Неважко перевірити, що $u_m(x,t)$ – розв"язок задачі

$$Lu_m = f_m(x,t), \quad (x,t) \in Q_T,$$

$$u_m(x,0) = 0, \quad u_{mt}(x,0) = 0.$$

Крім того, аналогічно як і оцінку /6/, можна одержати нерівність

$$\|u_m^{\varepsilon_k}(x,t)\|_{H^{4,2}(Q_T)} \leqslant C_4 \|f_m\|_{2,2}.$$

Перейдемо у цій нерівності до границі, коли $\varepsilon_k \to 0$, $m \to \infty$. Тоді дістаємо, що гранична функція $u(x,t)$ є розв"язком задачі /I/, /2/ і задовольняє оцінку /3/.

Якщо $\gamma_0 \leqslant 1$, то для будь-якого розв"язку задачі /I/, /2/, що належить класу $H^{2,1}(Q_T)$, можна одержати оцінку

$$\|u\|_{H^{2,1}(Q_T)} \leqslant C_5 \|f\|_{L_2(Q_T)},$$

з якої випливає єдиність розв"язку задачі /I/, /2/.

I. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1983. 2. Уроев В.М. О гладкости решений нестационарных уравнений типа колебания пластины // Диф. уравнения. 1980. Т.16. № 10. С. 1835-1842.

Стаття надійшла до редколегії 09.02.87

УДК 681.51

В.М.Кирилич

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ БІОПОПУЛЯЦІЙ

Пропонуємо метод розв"язування однієї нелокальної задачі, яка виникає при вивченні динаміки біопопуляцій [2, 4]:

$$\frac{du}{dt} + \frac{du}{dx} = f(x,t,u(x,t),z(t)), \quad (0 < x < l,\ t > 0), \qquad /1/$$

$$u(0,t) = \int_0^l \alpha(x,t)u(x,t)\,dx, \quad t > 0, \qquad /2/$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \qquad /3/$$

$$z'(t) = \int_0^l q(x,t,u(x,t),z(t))\,dx, \quad t > 0, \qquad /4/$$

$$z(0) = z_0. \qquad /5/$$

Тут $u(x,t)$, $z(t)$, $\alpha(x,t)$, $\varphi(x)$ – стандартні біологічні параметри [2, 4]; $u(x,t)$, $z(t)$ – шукані функції.

Використаний нами підхід базується на методі характеристик [1] і методиці редукції задач з нелокальними умовами для гіперболічних рівнянь до еквівалентних інтегральних рівнянь типу Вольтерра [3].

Всі розглядувані функції дійснозначні.

Теорема. Нехай:

1/ функції $f(x,t,u(x,t),z(t)),\ q(x,t,u(x,t),z(t)) \in C([0,l]\times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ і задовольняють локальну умову Ліпшиця по змінних u і z;

2/ коефіцієнт $\alpha(x,t) \in C([0,l]\times \mathbb{R}_+)$;

3/ функція $\varphi(x) \in C([0,l])$;

4/ виконується умова узгодження $\varphi(0) = \int\limits_0^l \alpha(x,0)\varphi(x)dx$.

Тоді існує єдиний неперервний узагальнений $(z(t), u(x,t) \in C(\mathbb{R}^2)$ розв"язок задачі /1/ – /5/.

Доведення. Введемо позначення

$$u(0,t) = \nu(t), \quad t \geqslant 0. \qquad /6/$$

Інтегруючи рівняння /1/ вздовж характеристик і враховуючи /6/, одержуємо

$$\underset{x<t}{u(x,t)} = \nu(t-x) + \int\limits_{t-x}^{t} f(\tau+x-t,\tau,u(\tau+x-t,\tau),z(\tau))d\tau, \qquad /7/$$

$$\underset{x>t}{u(x,t)} = \varphi(x-t) + \int\limits_{0}^{t} f(\tau+x-t,\tau,u(\tau+x-t,\tau),z(\tau))d\tau. \qquad /8/$$

Умову /2/ переписуємо у вигляді

$$\nu(t) = \int\limits_0^t \alpha(x,t)u(x,t)dx + \int\limits_t^0 \alpha(x,t)u(x,t)dx.$$

Підставивши сюди $u(x,t)$ з /7/ – /8/, маємо

$$\nu(t) = \int\limits_0^t \alpha(x,t)\nu(t-x)dx + \int\limits_0^t \Big(\int\limits_{t-x}^{t} f(\tau+x-t,\tau,u(\tau+x-t,\tau),z(\tau))d\tau\Big)dx +$$

$$+\int\limits_t \alpha(x,t)\varphi(t-x)dx + \int\limits_t^l \Big(\int\limits_0^t f(\tau+x-t,\tau,u(\tau+x-t,\tau),z(\tau))d\tau\Big)dx.$$

Отже, для $\nu(t)$ одержуємо інтегральне рівняння типу Вольтерра другого роду

$$\nu(t) = \int\limits_0^t \alpha(x,t)\nu(t-x)dx + L(t,u,z),$$

або

$$\nu(t) = \int\limits_0^t \alpha(\tau+t,t)\nu(\tau)d\tau + L(t,u,z). \qquad /9/$$

Звідси

$$v(t)=L(t,u,z)+\int_0^t R(t,\tau)L(\tau,u,z)d\tau, \qquad /10/$$

де $R(t,\tau)$ – резольвента ядра $\alpha(\tau,+t,t)$.

Тоді /7/ з врахуванням /10/ перепишемо у вигляді

$$u(x,t)=L(t-x,u,z)+\int_0^{t-x} R(t,\tau)L(\tau,u;z)d\tau+\int_{t-x}^{t} f(\tau+x- \qquad /11/$$

$$-t,\tau,u(\tau+x-t,\tau),z(\tau))d\tau.$$

Нехай

$$u(x,t)=U(x,t,z(t)) - \qquad /12/$$

розв"язок системи /8/, /11/, який знаходимо методом послідовних наближень. Неперервність функції $u(x,t)$ при переході через характеристику $x=t$ досягається умовою 4. Залежність $U(x,t,z(t))$ задовольняє умову Ліпшиця по z.

Підставивши /12/ в /4/ і проінтегрувавши одержаний вираз по t, дістанемо

$z(t)=z_0+\int_0^t G(\tau,z(\tau))d\tau$, $G(\tau,z(\tau))$ – відомий інтегральний оператор.

Останнє рівняння однозначно розв"язується для малих t методом ітерацій. Теорема доведена.

Зауваження. Якщо f і g лінійні відносно u і z, то теорема справедлива при всіх $t>0$.

1. А б о л и н я В.Э., М ы ш к и с А.Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости // Уч. зап. Латв. ун-та. 1958. Т.20. Вып. 3. С. 87-104. 2. Б у л а н ж е Е.Н. Исследование модели динамики развития лесной популяции под воздействием вредителей // Вестн. Москов. ун-та. Сер. 15. 1984. № 4. С. 34-39. 3. М е л ь н и к З.О. Задача с интегральными ограничениями для общих двумерных гиперболических уравнений и систем // Диф. уравнения. 1985. Т.21. № 2. С. 246-253. 4. Н а х у ш е в А.М. Нагруженные уравнения и их приложения // Диф.уравнения. 1983. Т.19. № 1. С.86-94.

Стаття надійшла до редколегії 23.02.87

УДК 517.956

В.Г.Костенко, Л.О.Губаль

НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ"ЯЗОК ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДВОВИМІРНОЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

Користуючись відомою схемою * та застосовуючи інтегральне перетворення у скінченних межах, знайдено наближений розв"язок змішаної задачі для двовимірної системи рівнянь параболічного типу зі сталими коефіцієнтами

$$(\partial u/\partial t)=D(\partial^2 u/\partial x^2)+A(\partial^2 u/\partial y^2)+L(\partial u/\partial x)+B(\partial u/\partial y)+Cu-f(t,x,y), \quad /1/$$

$$0<x<x_0,\ 0<y<y_0,\ t>0$$

з початковими

$$u\big|_{t=0}=\psi(x,y) \quad /2/$$

та крайовими

$$\left(D\frac{du}{dx}-Lu\right)\Big|_{x=0}=\left(D\frac{du}{dx}+Lu\right)\Big|_{x=x_0}=0,\ \left(A\frac{du}{dy}-Bu\right)\Big|_{y=0}=0,\ u\big|_{y=y_0}=0 \quad /3/$$

умовами. Тут $u(t,x,y)$ – стовпець невідомих функцій, матриці коефіцієнтів $A=\|a_{ij}\|$, $D=\|d_{ij}\|$, $B=\|b_{ij}\|$, $L=\|l_{ij}\|$, $C=\|c_{ij}\|$, $i,j=\overline{1,p}$ і стовпці $f(t,x,y)$, $\psi(x,y)$ вважаємо заданими.

Легко переконатись, що коли

$$d_{ij}=d_{ji}=l_{ij}=l_{ji}=0, \quad (d_{ii}/l_{ii})=\mu,\ i=\overline{1,p}, \quad /4/$$

то до задачі /1/–/3/ можна застосувати інтегральне перетворення

$$\overline{u}_n(t,y)=\int_0^{x_0}K(x,s_n)u(t,x,y)\,dx \quad /5/$$

з ядром $\quad K(x,s_n)=(1/c_n)\rho(x)\overline{K}(x,s_n),$

де $\quad \overline{K}(x,s_n)=exp(-(l_{11}/d_{11})x)((2s_n d_{11}/3l_{11})\cos s_n x+\sin s_n x); \quad /6/$

$$\rho(x)=exp\left(\frac{l_{11}}{d_{11}}\,x\right);\quad c_n^2=\int_0^{x_0}\left(\frac{2s_n d_{11}}{3l_{11}}\cos s_n x+\sin s_n x\right)^2dx;$$

s_n – послідовність коренів рівняння $ctg\,Sx_0=\dfrac{d_{11}}{2l_{11}}S-\dfrac{3l_{11}}{8d_{11}S}$.

---

* Костенко В.Б., Губаль Л.О. Наближений розв"язок змішаної задачі для параболічної системи рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1986. Вип. 25. С. 28-31.

Після застосування /4/ до /1/ - /3/ дістаємо

$$(\partial \bar{u}_n/\partial t)=A(\partial^2 \bar{u}_n/\partial y^2)+B(\partial \bar{u}_n/\partial y)+(c-\lambda_n^2)\bar{u}_n-\bar{f}_n(t,y), \qquad /1'/$$

$$\bar{u}_n\big|_{t=0}=\bar{\varphi}_n(y), \qquad /2'/$$

$$\left(A(\partial \bar{u}_n/\partial y)-B\bar{u}_n\right)\Big|_{y=0}=0, \quad \bar{u}_n\big|_{y=y_0}=0, \qquad /3'/$$

причому $S_n=(1/2\,d_{11})\sqrt{4\,d_{11}\lambda_n^2-l_{11}^2}$.

Розв"язок $\bar{u}_{n,k}(y)$ задачі /1'/ - /3'/ на відрізках прямих $0<y<y_0$, $t=t_k=k\tau$, $k=1,2,\dots$ знаходимо за формулами

$$\bar{u}_{n,k}(y)=\int_0^{y_0} G^{(n)}(y,\xi)\left[\bar{f}_{n,k}(\xi)-(1/\tau)\bar{u}_{n,k-1}(\xi)\right]d\xi\ , \qquad /7/$$

де $G^{(n)}(y,\xi)=\|G_{ij}^{(n)}(y,\xi)\|_{i,j=\overline{1,p}}$ – матриця Гріна задачі /1'/-/3'/, яку практично можна визначити в явній формі. Наприклад, для випадку $p=2$ вона має вигляд

$$G_{im}^{(n)}(y,\ )=(2/\Delta\Delta^*)\Big\{(\gamma_{24}-\gamma_{23})e^{(\alpha_3+\alpha_4)y_0}\sum_{j=3,4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{2j}e^{\alpha_1 y}+$$

$$+A_{j1}e^{\alpha_2 y}+A_{12}e^{\alpha_j y})+(\gamma_{24}-\gamma_{22})e^{(\alpha_2+\alpha_4)y_0}\sum_{j=2,4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{j3}e^{\alpha_1 y}+$$

$$+A_{1j}e^{\alpha_3 y}+A_{31}e^{\alpha_j y})+(\gamma_{23}-\gamma_{22})e^{(\alpha_2+\alpha_3)y_0}\sum_{j=2,3}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{4j}e^{\alpha_1 y}+$$

$$+A_{j1}e^{\alpha_4 y}+A_{14}e^{\alpha_j y})+(\gamma_{24}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_4)y_0}\sum_{j=1,4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{3j}e^{\alpha_2 y}+$$

$$+A_{j2}e^{\alpha_3 y}+A_{23}e^{\alpha_j y})+(\gamma_{23}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_3)y_0}\sum_{j=1,3}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{j4}e^{\alpha_2 y}+$$

$$+A_{2j}e^{\alpha_4 y}+A_{42}e^{\alpha_j y})+(\gamma_{22}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_2)y_0}\sum_{j=1,2}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{4j}e^{\alpha_3 y}+$$

$$+A_{j3}e^{\alpha_4 y}+A_{34}e^{\alpha_j y})\Big\}$$

$$0\le y\le\xi\ , \quad m=1,2,$$

$$G_{1m}^{(n)}(y,\xi)=(2/\Delta\Delta^*)\{(\gamma_{24}-\gamma_{23})e^{(\alpha_3+\alpha_4)y_0}\sum_{j=1}^{4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{2j}e^{\alpha_1 y}+A_{j1}e^{\alpha_2 y})+$$

$$+(\gamma_{24}-\gamma_{22})e^{(\alpha_2+\alpha_4)y_0}\sum_{j=1}^{4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{j3}e^{\alpha_1 y}+A_{1j}e^{\alpha_3 y})+$$

$$+(\gamma_{23}-\gamma_{22})e^{(\alpha_2+\alpha_3)y_0}\sum_{j=1}^{4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{4j}e^{\alpha_1 y}+A_{j1}e^{\alpha_4 y})+$$

$$+(\gamma_{24}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_4)y_0}\sum_{j=1}^{4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{3j}e^{\alpha_2 y}+A_{j2}e^{\alpha_3 y})+$$

$$+(\gamma_{23}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_3)y_0}\sum_{j=1}^{4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{j4}e^{\alpha_2 y}+A_{2j}e^{\alpha_4 y})+$$

$$+(\gamma_{22}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_2)y_0}\sum_{j=1}^{4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{4j}e^{\alpha_3 y}+A_{j3}e^{\alpha_4 y})\}$$

$$\xi\leqslant y\leqslant y_0,\quad m=1,2;$$

$$G_{2m}^{(n)}(y,\xi)=(2/\Delta\Delta^*)\{(\gamma_{24}-\gamma_{23})e^{(\alpha_3+\alpha_4)y_0}\sum_{j=3,4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{2j}\gamma_{21}e^{\alpha_1 y}+A_{j1}\gamma_{22}e^{\alpha_2 y}+$$

$$+A_{12}\gamma_{2j}e^{\alpha_j y})+(\gamma_{24}-\gamma_{22})e^{(\alpha_2+\alpha_4)y_0}\sum_{j=2,4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{j3}\gamma_{21}e^{\alpha_1 y}+A_{1j}\gamma_{23}e^{\alpha_3 y}+$$

$$+A_{31}\gamma_{2j}e^{\alpha_j y})+(\gamma_{23}-\gamma_{22})e^{(\alpha_2+\alpha_3)y_0}\sum_{j=2,3}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{4j}\gamma_{21}e^{\alpha_1 y}+A_{j1}\gamma_{24}e^{\alpha_4 y}+$$

$$+A_{14}\gamma_{2j}e^{\alpha_j y})+(\gamma_{24}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_4)y_0}\sum_{j=1,4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{3j}\gamma_{22}e^{\alpha_2 y}+A_{j2}\gamma_{23}e^{\alpha_3 y}+$$

$$+A_{23}\gamma_{2j}e^{\alpha_j y})+(\gamma_{23}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_3)y_0}\sum_{j=1,3}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{j4}\gamma_{22}e^{\alpha_2 y}+A_{2j}\gamma_{24}e^{\alpha_4 y}+$$

$$+A_{42}\gamma_{2j}e^{\alpha_j y})+(\gamma_{22}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_2)y_0}\sum_{j=1,2}\Delta_j^{(m)}\cdot$$

$$\cdot e^{-\alpha_j\xi}(A_{4j}\gamma_{23}e^{\alpha_3 y}+A_{j3}\gamma_{24}e^{\alpha_4 y}+A_{34}\gamma_{2j}e^{\alpha_j y})\}$$

$$0\leqslant y\leqslant\xi\qquad m=1,2,$$

$$G_{2m}^{(m)}(y,\xi)=(2/\Delta\Delta^*)\{(\gamma_{24}-\gamma_{23})e^{(\alpha_3+\alpha_4)y_0}\sum_{j=1}^{4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{2j}\gamma_{21}e^{\alpha_1 y}+$$

$$+A_{j1}\gamma_{22}e^{\alpha_2 y})+(\gamma_{24}-\gamma_{22})e^{(\alpha_2+\alpha_4)y_0}\sum_{j=1}^{4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{j3}\gamma_{21}e^{\alpha_1 y}+A_{1j}\gamma_{23}e^{\alpha_3 y})+$$

$$+(\gamma_{23}-\gamma_{22})e^{(\alpha_2+\alpha_3)y_0}\sum_{j=1}^{4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{4j}\gamma_{21}e^{\alpha_1 y}+A_{j1}\gamma_{24}e^{\alpha_4 y})+$$

$$+(\gamma_{24}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_4)y_0}\sum_{j=1}^{4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{3j}\gamma_{22}e^{\alpha_2 y}+A_{j2}\gamma_{23}e^{\alpha_3 y})+$$

$$+(\gamma_{23}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_3)y_0}\sum_{j=1}^{4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{j4}\gamma_{22}e^{\alpha_2 y}+A_{2j}\gamma_{24}e^{\alpha_4 y})+$$

$$+(\gamma_{22}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_2)y_0}\sum_{j=1}^{4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{4j}\gamma_{23}e^{\alpha_3 y}+A_{j3}\gamma_{24}e^{\alpha_4 y})\}$$

$$\xi \leqslant y \leqslant y_0, \quad m=1,2,$$

де

$$\Delta=(\gamma_{24}-\gamma_{23})e^{(\alpha_3+\alpha_4)y_0}A_{12}+(\gamma_{24}-\gamma_{22})e^{(\alpha_2+\alpha_4)y_0}A_{31}+(\gamma_{23}-\gamma_{22})e^{(\alpha_2+\alpha_3)y_0}\cdot$$

$$\cdot A_{14}+(\gamma_{24}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_4)y_0}A_{23}+(\gamma_{23}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_3)y_0}A_{42}+(\gamma_{22}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_2)y_0}A_{34};$$

$$A_{ij}=\begin{vmatrix}\alpha_i(a_{11}+\gamma_{2i}a_{12})+b_{11}+\gamma_{2i}b_{12} & \alpha_j(a_{11}+\gamma_{2j}a_{12})+b_{11}+\gamma_{2j}b_{12}\\ \alpha_i(a_{21}+\gamma_{2i}a_{22})+b_{21}+\gamma_{2i}b_{22} & \alpha_j(a_{21}+\gamma_{2j}a_{22})+b_{21}+\gamma_{2j}b_{22}\end{vmatrix},\ i,j=\overline{1,4}$$

$$\Delta^*=\begin{vmatrix}\gamma_{21}-\gamma_{24} & \gamma_{22}-\gamma_{24} & \gamma_{23}-\gamma_{24}\\ \alpha_1-\alpha_4 & \alpha_2-\alpha_4 & \alpha_3-\alpha_4\\ \alpha_1\gamma_{21}-\alpha_4\gamma_{24} & \alpha_2\gamma_{22}-\alpha_4\gamma_{24} & \alpha_3\gamma_{23}-\alpha_4\gamma_{24}\end{vmatrix};$$

$$\Delta_1^{(1)}=\begin{vmatrix} 0 & \gamma_{22}-\gamma_{24} & \gamma_{23}-\gamma_{24} \\ \frac{-a_{22}}{2\det A} & \alpha_2-\alpha_4 & \alpha_3-\alpha_4 \\ \frac{a_{21}}{2\det A} & \alpha_2\gamma_{22}-\alpha_4\gamma_{24} & \alpha_3\gamma_{23}-\alpha_4\gamma_{24} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2^{(1)}=\begin{vmatrix} \gamma_{21}-\gamma_{24} & 0 & \gamma_{23}-\gamma_{24} \\ \alpha_1-\alpha_4 & \frac{-a_{22}}{2\det A} & \alpha_3-\alpha_4 \\ \alpha_1\gamma_{21}-\alpha_4\gamma_{24} & \frac{a_{21}}{2\det A} & \alpha_3\gamma_{23}-\alpha_4\gamma_{24} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3^{(1)}=\begin{vmatrix} \gamma_{21}-\gamma_{24} & \gamma_{22}-\gamma_{24} & 0 \\ \alpha_1-\alpha_4 & \alpha_2-\alpha_4 & \frac{-a_{22}}{2\det A} \\ \alpha_1\gamma_{21}-\alpha_4\gamma_{24} & \alpha_2\gamma_{22}-\alpha_4\gamma_{24} & \frac{a_{21}}{2\det A} \end{vmatrix}, \quad \Delta_4^{(1)}=\begin{vmatrix} \gamma_{21}-\gamma_{22} & \gamma_{23}-\gamma_{22} & 0 \\ \alpha_1-\alpha_2 & \alpha_3-\alpha_2 & \frac{-a_{22}}{2\det A} \\ \alpha_1\gamma_{21}-\alpha_2\gamma_{22} & \alpha_3\gamma_{23}-\alpha_2\gamma_{22} & \frac{a_{21}}{2\det A} \end{vmatrix},$$

$\alpha_1=\alpha_1^{(n)}, \alpha_2=\alpha_2^{(n)}, \alpha_3=\alpha_3^{(n)}, \alpha_4=\alpha_4^{(n)}$ - дійсні прості корені рівняння

$$\det\left(A\alpha^2+B\alpha+C-(\lambda_n^2+(1/\tau)E\right)=0,$$

$$\gamma_{2j}=\gamma_{2j}^{(n)}=-\frac{a_{11}\alpha_j^{(n)2}+b_{11}\alpha_j^{(n)}+c_{11}-\lambda_n^2-(1/\tau)}{a_{12}\alpha_j^{(n)2}+b_{12}\alpha_j^{(n)}+c_{12}}, \quad j=\overline{1,4}, \quad n=1,2,\dots .$$

Визначники $\Delta_i^{(2)}$ одержуємо з $\Delta_i^{(1)}$, $i=\overline{1,4}$ відповідно заміною в останньому стовпця з елементами $0, (-a_{22}/2\det A), (a_{21}/2\det A)$ стовпцем з елементами $0, (a_{12}/2\det A), (-a_{11}/2\det A)$.

Зауважимо, що при цьому задовольняються співвідношення

$$\sum_{i=1}^{4}\Delta_i^{(1)}=0,\ \sum_{i=1}^{4}\gamma_{2i}^{(n)}\Delta_i^{(1)}=0,\ \sum_{i=1}^{4}\alpha_i^{(n)}\Delta_i^{(1)}=(-a_{22}/2\det A)\Delta^*,\ \sum_{i=1}^{4}\alpha_i^{(n)}\gamma_{2i}^{(n)}\Delta_i^{(1)}=\frac{a_{21}}{2\det A}\Delta^*;$$

$$\sum_{i=1}^{4}\Delta_i^{(2)}=0,\ \sum_{i=1}^{4}\gamma_{2i}^{(n)}\Delta_i^{(2)}=0,\ \sum_{i=1}^{4}\alpha_i^{(n)}\Delta_i^{(2)}=(a_{12}/2\det A)\Delta^*,\ \sum_{i=1}^{4}\alpha_i^{(n)}\gamma_{2i}^{(n)}\Delta_i^{(2)}=\frac{-a_{11}}{2\det A}\Delta^*.$$

Наближений розв"язок задачі /1/-/3/ за умов /4/ у прямокутних областях $0\leqslant x\leqslant x_0,\ 0\leqslant y\leqslant y_0,\ t=t_k=k\tau,\ k=1,2,\dots$ набуває вигляду:

$$u_k(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{u}_{n,k}(y)\overline{K}(x,S_n),$$

де $\overline{u}_{n,k}(y)$ і $\overline{K}(x,S_n)$ зображені відповідно формулами /7/ і /6/.

Зауваження. Цей алгоритм можна застосувати і тоді, коли матриці коефіцієнтів A, B, C залежать від t, а також і для випадку неоднорідних крайових умов вигляду /3/.

Стаття надійшла до редколегії 09.03.87

УДК 517.946

М.І.Іванчов

ПРО ОБЕРНЕНУ ЗАДАЧУ ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ТЕМПЕРАТУРОПРОВІДНОСТІ

Задача знаходження невідомого коефіцієнта температуропровідності при різних припущеннях розглядалась у багатьох працях [1-3, 5, 6]. Розглянемо необхідну умову існування коефіцієнта температуропровідності, що залежить від часу, або сталий, коли додаткова умова є стандартною крайовою умовою, і знайдемо цей коефіцієнт.

Розглянемо задачу знаходження невідомих функцій $\{a(t), u(x,t)\}$, що задовольняють умови

$$u_t = a(t)u_{xx}, \quad x > 0, \quad 0 < t < T, \qquad /1/$$

$$u(x,0) = 0, \quad x > 0, \qquad /2/$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad 0 \leq t < T. \qquad /3/$$

Додаткову умову задамо у вигляді

$$u_x(0,t) = \nu(t), \quad 0 \leq t < T. \qquad /4/$$

Припускаємо, що функції $\mu(t)$, $\nu(t)$ і $\mu'(t)$ неперервні на $[0,T]$, $\mu(0) = \nu(0) = 0$.

За допомогою заміни

$$\theta = \alpha(t),$$

де

$$\alpha(\tau) = \int_0^\tau a(\sigma)\,d\sigma, \qquad /5/$$

рівняння /1/ зводимо до вигляду

$$u_\theta = u_{xx}, \qquad /6/$$

що дає змогу скористатись відомою формулою для розв"язку першої крайової задачі для рівняння теплопровідності в напівобмеженому стержні. Повертаючись до змінної t, одержуємо розв"язок задачі /1/ - /3/:

$$u(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau)\,a(\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\, e^{-\frac{x^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}}\, d\tau. \qquad /7/$$

Звідси за допомогою елементарних перетворень знаходимо

$$u_x(x,t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu'(\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\, e^{-\frac{x^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}}\, d\tau. \qquad /8/$$

Підставляючи /8/ в умову /4/, приходимо до інтегрального рівняння Вольтерра першого роду відносно невідомої $(\alpha(t)-\alpha(\tau))^{-1/2}$:

$$\nu(t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu'(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\,. \qquad /9/$$

Рівняння /9/ можна розв"язати одним з методів, розглянутих у [4].

Представляючи різницю $\alpha(t)-\alpha(\tau)$ у вигляді

$$\alpha(t)-\alpha(\tau) = A(t,\tau)(t-\tau),$$

де

$$A(t,\tau) = \int_0^1 a(\tau+\sigma(t-\tau))\,d\sigma,$$

отримуємо з /15/ необхідну умову існування розв"язку оберненої задачі /1/-/4/ для $a(t)$ таких, що $C_0 < a(t) < C_1$, C_0, C_1 - додатні сталі:

$$0 < C_2 \leq -\frac{1}{\nu(t)} \int_0^t \frac{\mu'(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}} < C_3\,, \qquad /10/$$

де C_2, C_3 - деякі сталі.

Зауважимо, що інший варіант необхідної умови існування розв"язку оберненої задачі /1/-/4/ можна знайти у [6].

Припустимо тепер, що при $0 \leq t < T_0$ функції $\mu(t)$ і $\nu(t)$ розкладаються у рівномірно збіжні ряди

$$\mu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n t^n, \qquad /11/$$

$$\nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu_n t^{n-\frac{1}{2}}. \qquad /12/$$

Якщо $\mu_1 \neq 0$, $\nu_0 \neq 0$, то необхідна умова /10/ для таких функцій виконується. Припускаємо, що функція $a(t)$ також розкладається у рівномірно збіжний ряд

$$a(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \qquad \text{де} \quad a_0 > 0 . \qquad /13/$$

Тоді

$$\alpha(t)-\alpha(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty} (a_n/n+1)(t^{n+1}-\tau^{n+1}), \qquad /14/$$

$$(\alpha(t)-\alpha(\tau))^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{a_0(t-\tau)}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(t^{n+1}-\tau^{n+1})}{a_0(n+1)(t-\tau)}\right)^k /15/$$

Підставляючи /11/, /12/ і /15/ в /9/ і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях t, знаходимо

$$\sqrt{a_0}=-(\mu_1/\nu_0\sqrt{\pi}),$$

$$a_1=(3a_0/\mu_1)(\nu_1\sqrt{\pi a_0}+(4/3)\mu_2),$$

$$a_2=\frac{20a_0}{11\mu_1}\left(-\nu_2\sqrt{\pi a_0}-\frac{8}{5}\mu_3+\frac{3\mu_2 a_1}{5a_0}-\frac{43\mu_1 a_1^2}{160\,a_0^2}\right) \quad \text{і т.д.}$$

Зупинимось на випадку, коли $a(t)=a_0>0$, де a_0 – стала. Добре видно, що тоді необхідна умова /10/ набуде вигляду

$$-\frac{1}{\nu(t)}\int_0^t\frac{\mu'(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}=C_4>0, \qquad /16/$$

де C_4 – деяка стала, а коефіцієнт температуропровідності знаходимо за формулою

$$\sqrt{a_0}=-\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\nu(t)}\int_0^t\frac{\mu'(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} . \qquad /17/$$

Взагалі кажучи, коли коефіцієнт температуропровідності сталий, то доцільно змінити постановку оберненої задачі /1/–/4/ замінивши умову /4/ на умову

$$u_x(0,t_0)=\nu_0, \quad \nu_0-const, \quad 0<t_0\leq T . \qquad /4'/$$

Тоді розв"язок задачі /1/–/3/, /4'/ при виконанні умови

$$\nu_0\int_0^{t_0}(\mu'(\tau)d\tau)/\sqrt{t-\tau}<0$$

дається формулою

$$\sqrt{a_0} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\nu_0}\int_0^{t_0}\frac{\mu'(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

і /7/ з заміною $\alpha(t)$ на $a_0(t)$.

1. Безнощенко Н.Я. Достаточные условия существования решения задач определения коэффициентов при старших производных параболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 11. С. 1908-1915. 2. Искендеров А.Д. Многомерные обратные задачи для линейных и квазилинейных параболических уравнений // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225. № 5. С. 1005-1008. 3. Ратини А.К. Об определении постоянного коэффициента уравнения теплопроводности // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 11. С. 1928-1937. 4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., 1986. 5. Dümmel S. Inverse problems for the heat equation // Probl. und Meth. math. Phys. 8 Jag. Karl-Marx-Stadt, 20-24 Juni. 1984. P.21-26. 6. Lorenzi A. Determination of a timedependent coefficient in a quasi-linear parabolic equation // Ric. Mat. 1983. Vol. 32. № 2. P.263-284.

Стаття надійшла до редколегії 29.06.87

УДК 517.956

Г.М.Закопець

УЗАГАЛЬНЕНА ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ У ПІВПРОСТОРІ $(n > 3)$

Розглядаємо задачу Діріхле для бігармонічного рівняння у півпросторі, коли граничні значення - узагальнені функції. Виконання граничних умов розуміємо в сенсі [1]. У класичній постановці задача досліджена в [3].

Нехай $D(\mathbb{R}^{n-1})$ - простір фінітних нескінченно-диференційованих функцій на $\mathbb{R}^{n-1}$, $D'(\mathbb{R}^{n-1})$ - простір лінійних неперервних функціоналів на $D(\mathbb{R}^{n-1})$, $E'(\mathbb{R}^{n-1})$ - простір узагальнених функцій з $D'(\mathbb{R}^{n-1})$ і компактними носіями. Дію узагальненої функції F на основну φ позначаємо (F, φ) [2].

<u>Постановка задачі</u>. Нехай $F, G \in D'(\mathbb{R}^{n-1})$. Знайти розв"язок рівняння

$$\Delta^2 u(x) = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n_+ = \{x : x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_n > 0\}, \qquad /1/$$

який задовольняє граничні умови

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^{n-1}_\varepsilon} u(x_\varepsilon)\psi(x_\varepsilon)\,dx_\varepsilon = (F,\psi(x')),\quad \forall\psi\in D(\mathbb{R}^{n-1}), \qquad /2/$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^{n-1}_\varepsilon} \left(\partial u(x_\varepsilon)/\partial\nu_{x_\varepsilon}\right)\psi(x_\varepsilon)\,dx_\varepsilon = (G,\psi(x')),\quad \forall\psi\in D(\mathbb{R}^{n-1}), \qquad /3/$$

де $x_\varepsilon = x+\varepsilon\nu_x$; $\psi(x_\varepsilon)=\psi(x')$; $x_\varepsilon\in\mathbb{R}^{n-1}_\varepsilon=\{x: x\in\mathbb{R}^n,\ x_n=\varepsilon\}$; $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$; $0<\varepsilon<\varepsilon_0$; ν_x – орт внутрішньої нормалі до $\mathbb{R}^{n-1}$ у точці x.

Справедливі наступні твердження.

<u>Лема 1</u>. Для довільної функції $\psi(x')\in D(\mathbb{R}^{n-1})$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{n\varepsilon^3\psi(x')\,dx'}{\alpha_n\left[|x'-s'|^2+\varepsilon^2\right]^{(n/2)+1}} = \psi(s'),$$

де

$$\alpha_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dt'}{\left[1+|t'|^2\right]^{n/2}}.$$

<u>Лема 2.</u>

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\varepsilon^2\psi(x')\,dx'}{\alpha_n\left[|x'-s'|^2+\varepsilon^2\right]^{n/2}} = 0,\quad \forall\psi\in D(\mathbb{R}^{n-1}).$$

<u>Лема 3.</u>

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial}{\partial\nu_{x_\varepsilon}}\left[\frac{\varepsilon^2}{\alpha_n\left[|x'-s'|^2+\varepsilon^2\right]^{n/2}}\right]\psi(x')\,dx' = \psi(s'),\ \forall\psi\in D(\mathbb{R}^{n-1}).$$

<u>Лема 4.</u>

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial}{\partial\nu_{x_\varepsilon}}\left[\frac{n\varepsilon^3}{\alpha_n\left[|x'-s'|^2+\varepsilon^2\right]^{(n/2)+1}}\right]\psi(x')\,dx' = 0,\ \forall\psi\in D(\mathbb{R}^{n-1}).$$

При доведенні цих лем використана методика з праці [3].

<u>Теорема 1</u>. Нехай $F, G\in E'(\mathbb{R}^{n-1})\subset D'(\mathbb{R}^{n-1})$. Тоді функція

$$u(x) = \left(G(s'),\ \frac{x_n^2}{\alpha_n\left[|x'-s'|^2+x_n^2\right]^{n/2}}\right)+\left(F(s'),\ \frac{nx_n^3}{\alpha_n\left[|x'-s'|^2+x_n^2\right]^{(n/2)+1}}\right) \qquad /4/$$

є розв"язком задачі /1/ – /3/.

<u>Доведення</u>. Підставляючи /4/ в /1/, легко переконатися, що функція $u(x)$ бігармонічна в $\mathbb{R}^n_+$. У тому, що вона задовольняє умови /2/, /3/, переконуємось, використовуючи неперервність функціоналів F, G, аналог теореми Фубіні та леми 1–4. Теорема доведена.

Бігармонічна функція $U(x)$ належить класу K [3], якщо її можна зобразити у вигляді

$$U(x) = \varphi(x) + x_n \psi(x),$$

де

1/ $\varphi(x), \psi(x)$ - гармонічні функції для $x_n > 0$;

2/ $\varphi(x) = O(r^{\alpha}), \psi(x) = O(r^{\alpha}), r^2 = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \to \infty$;

α - константа; $\alpha \in (0,1)$;

3/ $x_n \psi(x) \to 0$ при $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \to (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$.

Теорема 2. Розв"язок задачі /1/-/3/ єдиний у класі бігармонічних функцій K.

При доведенні цієї теореми використовується методика з праці [1].

1. Гупало Г.С. Про узагальнену задачу Діріхле // Доп. АН УРСР. 1966. № 7. С. 843-846. 2. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М., 1965. 3. Bazański F.; Fzydzicn Z. O zagadnieniu biharmonicznym dla półprzestrzeni w przypadku n-wymiarowym // Roczniki Polskego Towarzystwa Matematycznego. 1964. Seria I. Prace Matematyczne VIII. S.221-237.

Стаття надійшла до редколегії 23.03.87

УДК 517.956

Г.-В.С.Гупало, Л.Ю.Кашицька

ПРО УЗАГАЛЬНЕНУ ЗАДАЧУ РІК"Є ДЛЯ БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ

У класичній постановці задача Рік"є для бігармонічного рівняння в півплощині і півпросторі / $n \geq 3$ / розглянута у працях [1, 2, 4]. Доведені теореми про зображення розв"язку задачі через задані граничні значення і теореми єдиності у певному класі бігармонічних функцій [4]. Досліджені [1, 2] класична розв"язність цієї задачі у півплощині та граничні властивості розв"язків при більш загальних умовах ніж у [4]. Ми розглянемо цю задачу за умови, що задані граничні значення є узагальненими функціями. Виконання граничних умов розуміємо у сенсі праці [3].

Нехай $D(R^{n-1})$ - простір фінітних нескінченно диференційованих функцій $\varphi(x'), x' \in R^{n-1}$, $D'(R^{n-1})$ - простір лінійних неперервних функціоналів /узагальнених функцій/ на $D(R^{n-1})$; $E'(R^{n-1})$ - простір фінітних узагальнених функцій; $\langle A, \varphi \rangle$ - дія $A \in D'(R^{n-1})$ на $\varphi \in D(R^{n-1})$.

Постановка задачі. Нехай $A, B \in D'(R^{n-1})$. Знайти розв"язок $u(x)$ бігармонічного рівняння

$$\Delta^2 u = 0 \quad \text{в} \quad R^n_+ = \{(x', x_n) : x' \in R^{n-1},\ x_n > 0\},\ n \geq 2, \qquad /1/$$

який задовольняє граничні умови

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{R^{n-1}_\varepsilon} u(x_\varepsilon) \psi(x_\varepsilon) dx_\varepsilon = \langle A, \psi \rangle,\ \forall \psi \in D(R^{n-1}), \qquad /2/$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{R^{n-1}_\varepsilon} \Delta u(x_\varepsilon) \psi(x_\varepsilon) dx_\varepsilon = \langle B, \psi \rangle,\ \forall \psi \in D(R^{n-1}), \qquad /3/$$

де $\psi(x_\varepsilon) = \psi(x)$, якщо $x_\varepsilon = x + \varepsilon \nu(x)$, $x_\varepsilon \in R^{n-1}_\varepsilon$, $x \in R^{n-1}$, $\nu(x)$ – орт внутрішньої нормалі до R^{n-1} у точці x, $R^{n-1}_\varepsilon = \{(x', x_n) : x' \in R^{n-1}, x_n = \varepsilon\}$, Δ – оператор Лапласа.

Справедливі такі твердження.

Лема. Для $\forall \psi \in D(R^{n-1})$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{a_n} \int_{R^{n-1}} \frac{\psi(x')}{(|x'-s'|^2 + \varepsilon^2)^{n/2}} dx' = \psi(s'),$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{2(2-n)a_n} \int_{R^{n-1}} \frac{\psi(x')}{(|x'-s'|^2 + \varepsilon^2)^{(n-2)/2}} dx' = 0,$$

де $$a_n = \int_{R^{n-1}} \frac{dt'}{(|t'|^2 + 1)^{n/2}}; \quad |x'-s'|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - s_i)^2.$$

Справді, в інтегралах робимо заміну змінних $x' = s' + \varepsilon t'$, якобіан якої дорівнює ε^{n-1}. Оскільки $\psi \in D(R^{n-1})$, то можемо перейти до границі під знаком інтегралу.

Теорема 1. Нехай $A, B \in E'(R^{n-1}) \subset D'(R^{n-1})$. Функції

$$u(x,y) = \langle A(s), \frac{y}{\pi} \frac{1}{(x-s)^2 + y^2} \rangle + \langle B(s), \frac{y}{4\pi} \ln[(x-s)^2 + y^2] \rangle, \qquad /4/$$

$$u(x) = u(x', x_n) = \langle A(s'), \frac{x_n}{a_n} \frac{1}{(|x'-s'|^2 + x_n^2)^{n/2}} \rangle +$$

$$+ \langle B(s'), \frac{x_n}{2(2-n)a_n} \frac{1}{(|x'-s'|^2 + x_n^2)^{(n-2)/2}} \rangle \qquad /5/$$

з розв"язками задачі Рік"є /I/–/3/ у півплощині R_+^2 і півпросторі R_+^n, $n\geq 3$.

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що функції /4/ і /5/ бігармонічні в R_+^2 і R_+^n, $n\geq 3$. Використовуючи лінійність і неперервність функціоналів, аналог теореми Фубіні та лему, показуємо, що виконуються граничні умови /2/ і /3/. У зв"язку з громіздкістю їх не записуємо.

Легко переконатися, що функції $\langle A(s), \frac{y}{\pi}\,\frac{1}{(x-s)^2+y^2}\rangle$,

$$\langle B(s), (1/4\pi)\ln[(x-s)^2+y^2]\rangle, \quad \langle A(s'), (x_n/a_n)\left(1/(|x'-s'|^2+x_n^2)^{n/2}\right)\rangle,$$

$$\langle B(s'), \frac{1}{2(2-n)a_n}\,\frac{1}{(|x'-s'|^2+x_n^2)^{(n-2)/2}}\rangle$$

гармонічні в R_+^2 і R_+^n, $n\geq 3$. Отже, ми отримали розв"язки /бігармонічні функції/, які мають вигляд $u(x)=a(x)+x_n b(x)$, де $a(x)$, $b(x)$ – гармонійні функції, причому $x_n b(x)\to 0$, коли $(x', x_n)\to(x_0', 0)$. Клас таких бігармонійних функцій позначимо через K [4].

<u>Теорема 2</u>. Розв"язок задачі /I/–/3/ у класі K бігармонічних функцій єдиний.

При доведенні теореми використана методика з праці [3].

I. Горбайчук В.И. О свойствах решений задачи Рикье для бигармонического уравнения в полуплоскости. // Общая теория граничных задач: Сб. науч. тр. К., 1983. С. 259. 2. Горбайчук В.Й. Умови розв"язності задачі Рік"є для бігармонічного рівняння у півплощині і граничні властивості розв"язків // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1983. № 7. С.9–13. 3. Гупало Г.С. Про узагальнену задачу Діріхле // Доп. АН УРСР. 1966. № 7. С.843–846. 4. *Barański F. Rozwiazanie problemu Riquier w półpłaszyznie i w półprzestrzeni dla równania Biharmonicznego $\Delta^2 u=0$ // Prace Mat. 1964. № 8. P. 239–251.*

Стаття надійшла до редколегії 06.04.87

УДК 517.956

Г.П. Лопушанська

ПРО ОДИН МЕТОД РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ПАРАБОЛІЧНОЇ ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО СПРЯЖЕННЯ

Метод побудови розв"язку параболічної задачі з нелінійними граничними умовами, запропонований у /2/, переносимо на задачу нелінійного спряження. Розв"язок загальної лінійної параболічної задачі спряження наявний у [1].

Нехай Ω_{01}, Ω_{02} – області в R^n, $\Omega_{01}\cap\Omega_{02}=\Omega_{11}=\partial\Omega_{01}$; $\partial\Omega_{02}=\Omega_{11}\cup\Omega_{12}$, Ω_{1i} – $n-1$ – вимірні поверхні класу $C^{1+\beta}$, $0<\beta<1$; $Q_{pi}=\Omega_{pi}\times(0,\infty)$, $Q^{\tau}_{pi}=\Omega_{pi}\times(0,\tau)$, $\tau>0$, $p=0,1$; $i=1,2$;

$$Q_0=\overline{Q}_{01}\cup Q_{02};$$

$$L_i\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)\equiv\sum_{k,l=1}^{n}a^i_{kl}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_l}+\sum_{k=1}^{n}b^i_k(x,t)\frac{\partial}{\partial x_k}+c^i(x,t)-\frac{\partial}{\partial t}$$ –

параболічні в $\overline{Q}_{0i}$ оператори з обмеженими і неперервними за Гельдером коефіцієнтами, $a^i_{11}(x,t)>K_1$, $b^i_1(x,t)>-K_2$, $c^i(x,t)<0$ в Q_{0i}; K_1, K_2 – додатні константи.

Розглядаємо задачу

$$L_iu_i(x,t)=f_i(x,t),\ (x,t)\in Q_{0i},\ u_i\in C^2(Q_{0i})\cap C^1(\overline{Q}_{0i}); \quad /1/$$

$$u_i(x,0)=\psi_i(x),\ x\in\Omega_{0i}; \quad /2/$$

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial\nu^2}=g(x,t,u_2(x,t),\varphi(x,t)),\ (x,t)\in Q_{12}; \quad /3/$$

$$u_1(x,t)=f(u_2(x,t))+\kappa(x,t)\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial\nu^2},\ (x,t)\in Q_{11}; \quad /4/$$

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial\nu^1}=\alpha(x,t)\ \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial\nu^2},\ (x,t)\in Q_{11}, \quad /5/$$

$u_i(x,t)\geq 0$ – обмежені в Q_{0i}, $i=1,2$,
де $\partial/\partial\nu^i$ – внутрішня конормальна похідна для L_i; $f(u)$ – монотонно зростаюча неперервна функція; $f_i(x,t)$, $\psi_i(x)$, g, φ, $\alpha>0$, $\kappa>0$ – задані неперервні функції, $\psi_i(x)$ мають компактні носії в Ω_{0i}, $i=1,2$.

Теорема 1. Нехай функція $g(x,t,u,v)$ строго зростає по u і строго спадає по v, $f(u_1)-f(v_1)>f(u_2)-f(v_2)$, як тільки $u_1-v_1>u_2-v_2$, поверхня Q_{11} має властивість строгої сферичності зсередини та ззовні [2]. Тоді для довільного $0<\tau<\infty$ в Q^{τ}_0 існує не більше одного розв"язку задачі /1/–/5/.

Доведення. Нехай (u_1,u_2) і (v_1,v_2) – два розв"язки задачі в Q^{τ}_0. Припустимо, що у деякій точці $(x_i,t_i)\in Q^{\tau}_{0i}$ $u_i>v_i$. Тоді

$$g(x_i,t_i,u_i(x_i,t_i),\varphi(x_i,t_i))>g(x_i,t_i,v_i(x_i,t_i),\varphi(x_i,t_i)). \quad /6/$$

Нехай $w_i(x,t)=u_i(x,t)-v_i(x,t)$, тоді $L_i w_i = 0$ в Q_{0i} і $w_i(x,0)=0$, $i=1,2$. Отже, додатного максимуму функції $w_1(x,t)$ можна досягати лише на Q_{11}, а функції $w_2(x,t)$ – на $Q_{11} \cup Q_{12}$. Якщо б $w_2(x,t)$ набувала його у деякій точці $(x_2^0, t_2^0) \in Q_{12}$, то $\partial w_2(x_2^0, t_2^0)/\partial \nu^2 \geq 0$, і отримуємо суперечність із /6/ і тим, що

$$\frac{\partial w_2(x,t)}{\partial \nu^2} = g(x,t,u_2(x,t),\psi(x,t)) - g(x,t,v_2(x,t),\psi(x,t)) \text{ на } Q_{12}.$$

Коли б функції $w_i(x,t)$ набували додатного максимуму в точках $(x_i^*, t_i^*) \in Q_{11}$, то за теоремою 14 із [2] $\frac{\partial w_1(x_1^*,t_1^*)}{\partial \nu^1} < 0$, $\frac{\partial w_2(x_2^*,t_2^*)}{\partial \nu^2} > 0$. Отже, приходимо до суперечності, якщо враховувати умови на Q_{11} для функцій $w_1(x,t)$ і $w_2(x,t)$ і властивості функції $f(u)$.

Теорема 2. Нехай виконуються умови теореми 1 і, крім цього, функція $g(x,t,u,v) \to \pm\infty$, коли $u \to \pm\infty$, рівномірно відносно $(x,t) \in Q_{1i}$ і v із обмежених множин. Тоді існує єдиний обмежений розв"язок задачі /1/-/5/.

Доведення. Нехай $Z_R = \{(v_1,v_2): \sup\limits_{Q_{0i}^t} |v_i(x,t)| < R,\ i=1,2\}$.

Для кожної пари функцій $(v_1,v_2) \in Z_R$ визначимо пару (w_1,w_2), $w_i = T_i v_i$, що задовольняє /1/, /2/, /5/ і умови

$$\frac{\partial w_2(x,t)}{\partial \nu^2} = g(x,t,v_2(x,t),\psi(x,t)) \text{ на } Q_{12}, \qquad /3'/$$

$$w_1(x,t) = f(v_2(x,t)) + \kappa(x,t)\frac{\partial w_2(x,t)}{\partial \nu^2} \text{ на } Q_{11}. \qquad /4'/$$

Розв"язок шукаємо у вигляді

$$w_1(x,t) = \int_0^t \int_{\Omega_{11}} \Gamma_1(x,t;\xi,\tau)\rho_1(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + G_1(x,t),$$

$$w_2(x,t) = \int_0^t \int_{\Omega_{12}} \Gamma_2(x,t;\xi,\tau)\mu(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + \int_0^t \int_{\Omega_{11}} \Gamma_2(x,t;\xi,\tau)\rho_2(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + G_2(x,t),$$

де $\Gamma_i(x,t;\xi,\tau)$ – фундаментальні функції операторів L_i: $G_i(x,t) = \int_{\Omega_{0i}} \Gamma_i(x,t;\xi,0)\psi_i(\xi)\,d\xi - \int_0^t \int_{\Omega_{0i}} \Gamma_i(x,t;\xi,\tau) f_i(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$; (μ,ρ_1,ρ_2) – розв"язок системи інтегральних рівнянь

$$
-\frac{1}{2}\mu(x,t)+\int_0^t\int_{\Omega_{12}}\frac{\partial\Gamma_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial\nu^2}\mu(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int_0^t\int_{\Omega_{11}}\frac{\partial\Gamma_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial\nu^2}\rho_2(\xi,\tau)\times
$$

$$
\times d\xi d\tau-q(x,t,v_2(x,t),\psi(x,t))-\frac{\partial G_2(x,t)}{\partial\nu^2}, \qquad (x,t)\in Q_{12},
$$

$$
-\frac{1}{2}\rho_1(x,t)-\frac{\alpha(x,t)}{2}\rho_2(x,t)-\alpha(x,t)\int_0^t\int_{\Omega_{12}}\frac{\partial\Gamma_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial\nu^2}\mu(\xi,\tau)d\xi d\tau+
$$

$$
+\int_0^t\int_{\Omega_{11}}\frac{\partial\Gamma_1(x,t;\xi,\tau)}{\partial\nu^1}\rho_1(\xi,\tau)d\xi d\tau-\alpha(x,t)\int_0^t\int_{\Omega_{11}}\frac{\partial\Gamma_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial\nu^2}\rho_2(\xi,\tau)\times
$$

$$
\times d\xi d\tau-\alpha(x,t)\frac{\partial G_2(x,t)}{\partial\nu^2}-\frac{\partial G_1(x,t)}{\partial\nu^1}, \qquad (x,t)\in Q_{11},
$$

$$
-\frac{\kappa(x,t)}{2}\rho_2(x,t)-\kappa(x,t)\int_0^t\int_{\Omega_{12}}\frac{\partial\Gamma_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial\nu^2}\mu(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int_0^t\int_{\Omega_{11}}\Gamma_1(x,t;\xi,\tau)\rho_1(\xi,\tau)\times
$$

$$
\times d\xi d\tau-\kappa(x,t)\int_0^t\int_{\Omega_{11}}\frac{\partial\Gamma_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial\nu^2}\rho_2(\xi,t)d\xi d\tau-f(v_2(x,t))-G_1(x,t)+
$$

$$
+\kappa(x,t)\frac{\partial G_2(x,t)}{\partial\nu^2}, \quad (x,t)\in Q_{11}.
$$

Цим же методом, яким доведена теорема 13 у [2], показуємо, що оператор (T_1, T_2) має нерухому точку (U_1, U_2). Її можна знайти, наприклад, методом послідовних наближень.

1. Д р і н ь М.М., І в а с и ш и н С.Д. Матриця Гріна загальної крайової задачі для параболічної за І.Г.Петровським системи з розривними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1984. № 11. С.7-10. 2. Ф р и д м а н А. Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.

Стаття надійшла до редколегії 09.03.87

УДК 519.21

М.М.Шеремета, В.І.Гузар

ПРО ДЕЯКІ КЛАСИ ДОДАТНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай L – клас додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[x_0, +\infty[$, $x_0 > 0$ функцій. Скажемо [2], що $\alpha \in L^0$, коли $\alpha \in L$ і $\alpha((1+o(1))x) \sim \alpha(x)$ $(x \to +\infty)$. В.М.Золотарьов запропонував дослідити, в якому зв"язку знаходиться клас L^0 з іншими відомими в математичній літературі класами додатних функцій.

Додатна вимірна на $[x_0, +\infty[$ функція α називається RO - змінною [1, с. 86], якщо для кожного $\lambda \in [1, a]$, $1 < a < +\infty$, і всіх $x > x_0$ виконуються нерівності $0 < m < \alpha(\lambda x)/\alpha(x) < M < +\infty$. Скажемо, що $\alpha \in L_{RO}$, коли $\alpha \in L$ і є RO - змінною функцією. Справедливі такі твердження.

Теорема 1. $L^0 \subset L_{RO}$.

Теорема 2. $L^0 \neq L_{RO}$.

Теорема 3. Для кожної функції $\alpha \in L_{RO}$ існує функція $\beta \in L^0$ така, що функція $\eta(x) = \ln\alpha(x) - \ln\beta(x)$ неперервна й обмежена на $[x_0, +\infty[$.

Доведення теореми 3 опирається на властивості RO - змінних функцій і наступну теорему.

Теорема 4. Нехай $\alpha \in L$ і $A(\delta) = \overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\{\alpha((1+\delta)x)/\alpha(x)\}$. Для того, щоб $\alpha \in L^0$, необхідно і досить $A(\delta) \to 1$ $(\delta \to 0)$.

1. С е н е т а Е. Правильно меняющиеся функции. М., 1985.
2. Ш е р е м е т а М.Н. О связи ростом максимума модуля целых функций и модулями коэффициентов их степенных разложений // Изв. вузов. Математика. 1967. № 2. С.100-110.

Стаття надійшла до редколегії 06.04.87

УДК 519.21

Л.В.Білобрам, М.В.Заболоцький

ДОСТАТНІ УМОВИ ПОВІЛЬНОГО ЗРОСТАННЯ ВИПУКЛИХ ФУНКЦІЙ

Нехай L - клас повільно зростаючих функцій $l(x)$, тобто додатних, неспадних, необмежених, визначених на $[1, \infty[$, що задовольняють умову

$$l(2x) \sim l(x), \quad x \to \infty . \qquad /1/$$

При вивченні питань асимптотичної поведінки функцій $l \in L$, враховуючи теорему 1.2 з /2/ і не зменшуючи загальності, вважатимемо, що функції класу L неперервно диференційовані.

Клас додатних функцій $\varphi(x)$, визначених на $[1, \infty[$, зображуваних у вигляді

$$\varphi(x) = \int_1^x \psi(t)\, d\ln_m t, \qquad /2/$$

де $\psi(t)$ - неспадна функція; $\ln_m t \overset{def}{=} \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{m\text{-раз}} x,\ m \in N,$ називаємо випуклими відносно $\ln_m x$ і позначаємо через H_m.

Теорема 1. Нехай $l_1, l_2 \in L,\ \varphi \in H_m$ і

$$l_1(x) \leq \varphi(x) \leq l_2(x), \quad x \geq x_0 > 1. \qquad /3/$$

Якщо

$$l_2(x^2) = O(l_1(x)\ln x), \quad x \to \infty, \qquad /4/$$

тоді $\varphi \in L$.

Доведення. З /2/ одержуємо $\varphi(x^2) \geq \int_x^{x^2} \psi(t)\, d\ln_m t \geq$

$$\geq \frac{\psi(x)}{\ln_{m-1} x^2 \cdot \ldots \cdot \ln x^2} \int_x^{x^2} d\ln t \geq K_1 \psi(x)(\ln_{m-1} x \cdot \ldots \cdot \ln_2 x)^{-1}, \quad x \geq x_0,$$

де K_i - тут і надалі деякі додатні постійні; $i \in N$. Враховуючи останню нерівність, співвідношення /3/, /1/ і /4/, маємо

$$\varphi(x) \leq \varphi(2x) \leq \varphi(x) + \int_x^{2x} K_2 \varphi(t^2)(\ln_{m-1} t \cdot \ldots \cdot \ln_2 t)\, d\ln_m t \leq \varphi(x) +$$

$$+ K_2 \int_x^{2x} l_2(t^2)/\ln t\, d\ln t = K_3 l_2(4x^2)/\ln x + \varphi(x) \leq \varphi(x)(K_4 l_2(x^2)/(l_1(x) \times$$

$\times \ln x)+1) = \psi(x)(1+o(1)), \quad x \to \infty.$

Отже, $\psi \in H_m$.

Наслідок. Нехай $l \in L, l(x^2)=O(l(x)), x \to +\infty, \psi \in H_m$, ω – довільна функція, $\omega(x) \to \infty$, $x \to +\infty$. Якщо

$$\omega(x) l(x) \leq \psi(x) \leq l(x) \ln x, \quad x > x_0 > 1,$$

тоді $\psi \in L$.

Покажемо, що умову /4/, взагалі кажучи, поліпшити не можна, тобто побудуємо приклад функції $\Phi \in H_1$, $l_1(x) \leq \Phi(x) \leq l_2(x)$, $x \geq 1$, $l_1, l_2 \in L$, $\lim\limits_{x\to\infty} l_2(x^2)/(l_1(x)\ln x) > 0$, і $\Phi \bar{\in} L$.

Нехай (z_n) – послідовність додатних чисел така, що $z_1 = 1$, $z_{n+1}/z_n^{\ln z_n} \to \infty$, $n \to \infty$. Розглянемо рівняння

$$g(z) \overset{\text{def}}{=} \ln^k z - \ln^k z_n (1+\ln(z/z_n)),$$

де $k \geq 2$, $k \in N$ – фіксоване число. Враховуючи $g(z_n)=0$, $g(z_n^{\ln z_n}) > 0$, $g'(z)=(k\ln^{k-1}z - \ln^k z_n)z^{-1}$, одержуємо, що існує єдина точка z_n^*, $z_n < z_n^* < z_n^{\ln z_n} < z_{n+1}$, така що $g(z_n^*)=0$. У випадку $z \in]z_n, z_n^*[$ маємо $g(z) < 0$. Приймемо $\Phi(z) = \ln z_1^*$ при $z \in [1, z_1^*]$ і для $n \geq 2$

$$\Phi(z) = \begin{cases} \ln^k z, & z_{n-1}^* \leq z \leq z_n, \\ \ln^k z_n (1+\ln(z/z_n)), & z_n < z < z_n^*. \end{cases}$$

При $z \in [z_n, z_n^*]$ функція $G(z) \overset{\text{def}}{=} \ln^{k+1} z - \Phi(z)$ задовольняє умови $G'(z) = z^{-1}((k+1)\ln^k z - \ln^k z_n) \geq 0$, $G(z_n) > 0$, отже, $G(z) > 0$, тобто $\Phi(z) < \ln^{k+1} z$. З іншого боку, для цих же z маємо $\Phi(z) = \ln^k z - g(z) \geq \ln^k z$.

Таким чином, $l(x) \overset{\text{def}}{=} \ln^k x \leq \Phi(x) \leq l(x) \cdot \ln x$, $x \geq 1$, /порівняй з наслідком теореми 1/ і $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(2z_n)/\Phi(z_n) = 1+\ln 2$, тобто $\Phi \bar{\in} L$.

Нехай $\psi \in H_m$, $l \in L$, $A, B \in \mathbb{R}$, $0 < A < B < \infty$,

$$A l(x) \leq \psi(x) \leq B l(x), \quad x > x_0 > 1. \qquad /5/$$

З теореми 1 добре видно, що коли

$$l(x^2) = o(l(x)\ln x), \quad x \to \infty, \qquad /6/$$

то $\psi \in L$. Виявляється, що останнє твердження справедливе і без умови /6/.

Теорема 2. Нехай $\psi \in H_m$, $l \in L$, $0 < A < B < \infty$ та виконується умова /5/. Тоді $\psi \in L$.

Доведення. Нехай $l_0(x) = \inf\{l(t)/(l'(t)\cdot t): x < t < \infty\}$. Легко побачити, що $l_0(x) \to +\infty$, $x \to \infty$. Відомо [1, лема 3], що

$$l(x \exp l_0(x)) \leqslant e\,l(x).$$

За теоремою Лагранжа про середнє маємо $(x \geqslant x_0)$

$$\psi(x\cdot \exp l_0(x)) - \psi(x) \geqslant \psi'_{\ln_m x}(x)(\ln_m(x \exp l_0(x)) -$$

$$-\ln_m x) \geqslant \psi'_{\ln_m x}(x) K_5\, l_0(x)(\ln_{m-1} x \cdot \ln_{m-2} x \cdot \ldots \cdot \ln x)^{-1}.$$

Тоді

$$0 < \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x) - \psi(x/2)}{\psi(x/2)} \leqslant \lim_{x\to\infty} \frac{\psi'_{\ln_m x}(x)(\ln_m x - \ln_m(x/2))}{\psi(x/2)} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{x\to\infty} K_6 \frac{\psi(x \exp l_0(x)) \ln_{m-1} x \cdot \ldots \cdot \ln x}{\psi(x/2)\, l_0(x) \ln_{m-1}(x/2) \cdot \ldots \cdot \ln(x/2)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{BeK_7}{A} \lim_{x\to\infty} \frac{l(x)}{l(x/2)\, l_0(x)} = 0,$$

тобто $\psi \in L$.

1. Братищев А.В., Коробейник Ю.Ф. О некоторых характеристиках роста субгармонических функций // Мат. сб. 1978. Т. 108. № 1. С. 44-65. 2. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М., 1985.

Стаття надійшла до редколегії 23.02.87

УДК 517.948

М.Й.Михалюк

ПРО ЄДИНІСТЬ РОЗВ"ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ В ОДНОМУ КЛАСІ ПОТЕНЦІАЛІВ ДЛЯ ПОСТІЙНОЇ ГУСТИНИ

Обернена задача логарифмічного потенціалу полягає у відшуканні плоскої однозв"язної області D, при заповненні якої речовиною зі сталою густиною σ породжується заданий зовнішній потенціал $V_e(x,y)$.

Введемо допоміжну функцію $z = z(t)$, яка відображає конформно круг $|t| < 1$ комплексної площини t на область D площини $z = x + iy$, що містить початок координат, причому $z(0) = 0$, $z'(0) > 0$. Функцію $z = z(t)$ назвемо розв"язком оберненої задачі для зовнішнього потенціалу $V_e(x,y)$ і густини σ.

Обернена задача логарифмічного потенціалу зводиться до розв"язку нелінійного інтегрального рівняння

$$\sigma z_*(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{U_e(z(\tau))d\tau}{\tau - t}, \quad |t| > 1, \qquad /1/$$

де

$$z_*(t) = z(1/\bar{t}); \; U_e(z) = -(2/\pi)(\partial V_e/\partial z);$$

$$z(t) = \delta_1 t + \delta_2 t^2 + \delta_3 t^3 + \cdots, \quad \delta_1 > 0. \qquad /2/$$

Відомо, що коли густина розподілу мас $\sigma = 1$ і $U_e(z) = (1/z)$, то розв"язком оберненої задачі потенціалу є круг радіуса 1 з центром у початку координат.

Розглянемо випадок, коли

$$U_e(z) = (1/z) + (a/z^3), \qquad /3/$$

$$U_e(z) = (1/z) + (b/z^4), \qquad /4/$$

$$U_e(z) = (1/z) + (c/z^5), \qquad /5/$$

де a, b, c – комплексні числа; $\sigma = 1$.

Підставляючи /3/-/4/, /2/ в /1/, отримуємо нелінійні системи рівнянь:

$$\begin{cases} \delta_1 = \dfrac{1}{\delta_1} - \dfrac{3a\delta_3}{\delta_1^4}, \\ \bar{\delta}_3 = \dfrac{a}{\delta_1^3}, \\ \delta_2 = \delta_4 = \delta_5 = \ldots = 0; \end{cases} \qquad /3'/$$

$$\begin{cases} \delta_1 = (1/\delta_1) - (4b\delta_4/\delta_1^5), \\ \bar{\delta}_4 = b/\delta_1^4, \\ \delta_2 = \delta_3 = \delta_5 = \ldots = 0; \end{cases} \qquad /4'/$$

$$\begin{cases} \delta_1 = \dfrac{1}{\delta_1} - \dfrac{5c\delta_5}{\delta_1^6}, \\ \bar{\delta}_5 = \dfrac{c}{\delta_1^5}, \\ \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \delta_6 = \ldots = 0. \end{cases} \qquad /5'/$$

Системи /3'/-/5'/ мають единий розв"язок (δ_1, δ_3), (δ_1, δ_4), (δ_1, δ_5) відповідно при

$$|a|^2 \leqslant \frac{3^2}{4^4}, \quad |b|^2 \leqslant \frac{4^3}{5^5}, \quad |c|^2 \leqslant \frac{5^4}{6^6}, \qquad /6/$$

які задовольняють умову

$$z'(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad |t| < 1.$$

Таким чином, справедлива така теорема.

Теорема. Для потенціалів /3/-/5/, які задовольняють умову /6/, обернена задача для постійної густини $\sigma = 1$ має єдиний розв"язок у класі однозв"язних областей. При

$$|a|^2 > \frac{3^2}{4^4}, \quad |b|^2 > \frac{4^3}{5^5}, \quad |c|^2 > \frac{5^4}{6^6}$$

задача в цьому класі областей розв"язку не має.

Приклад. Для потенціалів /3/-/5/ при

$$a = \sqrt{\frac{3^2}{4^4}}, \quad b = \sqrt{\frac{4^3}{5^5}}, \; c = \sqrt{\frac{5^4}{6^6}}, \quad \sigma = 1$$

єдиними розв"язками у класі конформних відображень є відповідно функції

$$z_1(t)=\sqrt{3/4}\,t+(1/\sqrt{12})t^3,\quad |t|<1,$$

$$z_2(t)=\sqrt{4/5}\,t+(1/\sqrt{20})t^4,\quad |t|<1,$$

$$z_3(t)=\sqrt{5/6}\,t+(1/\sqrt{30})t^5,\quad |t|<1.$$

Стаття надійшла до редколегії 23.02.87

УДК 515.12

М.М.Зарічний

ФУНКТОРИ В КАТЕГОРІЇ КОМПАКТІВ, ЩО ЗБЕРІГАЮТЬ ОДНОРІДНІСТЬ

Розглянемо таку задачу: коли нормальний функтор $F:\mathrm{Comp}\longrightarrow\mathrm{Comp}$ зберігає клас топологічно однорідних просторів? Зауважимо, що всі поняття, які ми використовуємо, наявні у праці [3]. Розв"язок цієї задачі для функторів скінченного степеня дає така теорема.

Теорема. Нехай $F:\mathrm{Comp}\longrightarrow\mathrm{Comp}$ - нормальний функтор скінченного степеня $n\geqslant 1$, для якого простір $F(I^\tau)$ топологічно однорідний при деякому $\tau\geqslant\omega_2$. Тоді функтор F ізоморфний степеневому функтору $(-)^n$.

Тут необхідне допоміжне твердження.

Лема. Нехай K, L - метризовні компакти, $\tau\geqslant\omega_2$ і $h:F(K^\tau)\longrightarrow F(L^\tau)$ - гомеоморфізм. Тоді для будь-якого $x\in F(K^\tau)$ існує ізоморфізм діаграм $H:F(\pi^3(K^\omega))\to F(\pi^3(L^\omega))$, утворений гомеоморфізмами $h_1:F(K^\omega)\longrightarrow F(L^\omega)$, $h_{1j}:F(K^\omega\times K^\omega)\longrightarrow F(L^\omega\times L^\omega)$, $j=2,3$, $h_{123}:F(K^\omega\times K^\omega\times K^\omega)\longrightarrow F(L^\omega\times L^\omega\times L^\omega)$, для якого існує точка $\bar{x}\in F(K^\omega)$, що задовольняє умови $\deg(x)=\deg(\bar{x})$, $\deg h(x)=\deg h_1(\bar{x})$.

Доведення проводиться аналогічно лемі 1 з праці [2].

Переходимо до доведення теореми. Припустимо, що $F(I^\tau)$, $\tau\geqslant\omega_2$, однорідний компакт. Нехай $h:F(I^\tau)\longrightarrow F(I^\tau)$ - гомеоморфізм, що переводить точку $x\in F(I^\tau)$, для якої $\deg(x)=n$, в точку $y=h(x)$, для якої $\deg(y)=1$. Нехай $H=\{h_1, h_{12}, h_{13}, h_{123}\}$ - автоморфізм діаграми $F(\pi^3(I^\omega))$, для якого існує точка $\bar{x}\in F(I^\omega)$ така, що $\deg(\bar{x})=\deg(x)=n$ і $\deg(h_1(x))=\deg(y)=1$.

Оскільки степінь функтора F дорівнює n, то для кожної пари точок $z_1, z_2 \in F(I^\omega \times I^\omega)$ такої, що $F(\pi_1)(z_1) = F(\pi_1)(z_2) = \bar{x}$, існує і єдина точка $z \in F(I^\omega \times I^\omega \times I^\omega)$ така, що $F(\pi_{12})(z) = z_1$, $F(\pi_{13})(z) = z_2$. Іншими словами, діаграма

$$\begin{tikzcd}
F(\pi_{12})^{-1}F(\pi_1)^{-1}(\bar{x}) = F(\pi_{13})^{-1}F(\pi_1)^{-1}(\bar{x}) \arrow[r, "F(\pi_{13})"] \arrow[d, "F(\pi_{12})"'] & F(\pi_1)^{-1}(\bar{x}) \arrow[d, "F(\pi_1)"] \\
F(\pi_1)^{-1}(\bar{x}) \arrow[r, "F(\pi_1)"] & \{\bar{x}\}
\end{tikzcd}$$

є універсальним квадратом. Оскільки H – автоморфізм діаграми $F(\pi^3(I^\omega))$, то діаграма

$$\begin{tikzcd}
F(\pi_{12})^{-1}F(\pi_1)^{-1}(h_1(\bar{x})) \arrow[r, "F(\pi_{13})"] \arrow[d, "F(\pi_{12})"'] & F(\pi_1)^{-1}(h_1(\bar{x})) \arrow[d, "F(\pi_1)"] \\
F(\pi_1)^{-1}(h_1(\bar{x})) \arrow[r, "F(\pi_1)"] & \{h_1(\bar{x})\}
\end{tikzcd}$$

$$|||$$

$$\begin{tikzcd}
F(h_1(\bar{x}) \times I^\omega \times I^\omega) \arrow[r, "F(\pi_{13})"] \arrow[d, "F(\pi_{12})"'] & F(h_1(\bar{x}) \times I^\omega) \arrow[d, "F(\pi_1)"] \\
F(h_1(\bar{x}) \times I^\omega) \arrow[r, "F(\pi_1)"] & \{h_1(\bar{x})\}
\end{tikzcd}$$

/рівність випливає з нормальності функтора F /також універсальний квадрат. Це означає, що функтор F зберігає добутки гільбертових кубів, що, як легко бачити, еквівалентне його мультиплікативності. За теоремою 1 з праці [1] $F \cong (-)^n$. Теорема доведена.

У зв"язку з доведеною теоремою виникають такі запитання:

1. Чи можна опустити в теоремі умову скінченності степеня функтора?

2. Чи можна послабити умову нормальності, відкинувши властивість збереження прообразів?

1. З а р и ч н ы й М.М. Мультипликативный нормальный функтор – степенной // Мат. заметки. 1987. Т.41. № 1. С.93–100.
2. С м и р н о в М.В. О топологической неоднородности пространств типа $exp K^{\tau}$ // Докл. АН СССР. 1980. Т.255. № 3. С.526–531.
3. Щ е п и н Е.В. Функторы и несчетные степени компактов // Успехи мат. наук. 1981. Т.36. С.3–62.

Стаття надійшла до редколегії 08.04.86

УДК 519.71

О.Д.Артемович

ГЛОБАЛЬНА РЕАКЦІЯ ГРУПОВИХ СИСТЕМ

Загальною системою називається відношення S на непорожніх множинах X і Y [2], тобто $S \subset X \times Y$, де $\times$ – символ декартового добутку.

Якщо S – система, C – довільна множина і функція $R: C \times X \longrightarrow Y$ – така, що

$$(x,y) \in S \Longleftrightarrow ((\exists c \in C)[\,y = R(c,x)],$$

то C називається об"єктом глобальних станів системи, елементи множини C – глобальними станами системи, а функція R – глобальною реакцією системи S. Функція R може бути і частковою. Проте теорема 1.1 із [2] твердить, що кожній системі S відповідає деяка глобальна реакція R, визначена для кожного елемента з множини $C \times X$.

Надалі, як і в [2], R називатимемо глобальною реакцією лише тоді, коли функція R визначена для кожного елемента із множини $C \times X$. Зауважимо також, що всі позначення і терміни, які ми використовуємо без пояснень, можна знайти в [1, 2]; зокрема, через $D(F)$ позначаємо область визначення функції F.

<u>Означення 1.</u> Нехай X – вільна абелева група, Y – абелева група, S – відношення, $S \subset X \times Y$, причому $S \neq \emptyset$.

Якщо a, b – будь-які елементи із S і $a \cdot b \in S$, де через $\cdot$ позначено операцію абелевої групи $X \times Y$, то S називаємо <u>груповою</u> системою.

Наявна така теорема.

<u>Теорема 1.</u> Нехай X – вільна абелева група, Y – абелева група. Тоді система S групова в тому і лише в тому випадку, коли знайдеться така глобальна реакція $R: C \times X \longrightarrow Y$,

що:

1/ C – абелева група;

2/ існує пара таких гомоморфізмів $R_1 : C \longrightarrow Y$, $R_2 : X \longrightarrow Y$, коли для всіх $(c, x) \in C \times X$

$$R(c, x) = R_1(c) R_2(x).$$

Доведення. Достатність. Припустимо, що для системи S знайдеться така глобальна реакція $R : C \times X \longrightarrow Y$, що:

1/ C – абелева група;

2/ існує пара таких гомоморфізмів $R_1 : C \longrightarrow Y$ і $R_2 : X \longrightarrow Y$, коли для всіх $(c, x) \in C \times X$ $R(c, x) = R_1(c) R_2(x)$. Нехай $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ – два будь-які елементи з S. Тоді, оскільки

$$(x_1, y_1) \in S \Longleftrightarrow (\exists c_1 \in C)[y_1 = R(c_1, x_1)],$$

і $$(x_2, y_2) \in S \Longleftrightarrow (\exists c_2 \in C)[y_2 = R(c_2, x_2)],$$

$$y_1 y_2 = R(c_1, x_1) R(c_2, x_2) = R_1(c_1) R_2(x_1) R_1(c_2) R_2(x_2) = R_1(c_1) R_1(c_2) \times$$

$$\times R_2(x_1) R_2(x_2) = R_1(c_1 c_2) R_2(x_1 x_2) = R(c_1 c_2, x_1 x_2),$$

то $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2) \in S$.
Отже, S – групова система.

Необхідність. Спочатку потрібно встановити існування такого відображення $R_2 : X \longrightarrow Y$, що

$$\{(x, R_2(x)) \mid x \in X\} \subset S.$$

Нехай X_S – деяка підгрупа в X, а $L_S : X_S \longrightarrow Y$ – такий гомоморфізм, що $\{(x, L_S(x)) \mid x \in X_S\} \subset S$.
Покажемо, що вибрані таким чином X_S і L_S існують завжди. Нехай $(\bar{x}, \bar{y}) \in S \neq \emptyset$, тоді приймемо $X_S = \{\bar{x}^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $L_S : X_S \longrightarrow Y$, причому $L_S(\bar{x}^k) = \bar{y}^k$. Якщо $X_S = X$, то L_S – шуканий гомоморфізм. Коли ж $X_S \neq X$, то L_S, користуючись лемою Цорна, можна продовжити так, що $X_S = X$. Справді, нехай $L' = \{L_\nu\}$ – клас усяких гомоморфізмів, визначених на підгрупах групи X і таких, що коли підгрупа X_ν – це область визначення відображення L_ν, то $\{(x, L_\nu(x)) \mid x \in X_\nu\} \subset S$.
Тоді, очевидно, $L' \neq \emptyset$. Визначимо на L' відношення часткового порядку $\leqslant$ наступним чином. Якщо $L_{\nu_1}, L_{\nu_2} \in L'$, то $L_{\nu_1} \leqslant L_{\nu_2}$

тоді і лише тоді, коли $L_{\nu_1} \subseteq L_{\nu_2}$. Зрозуміло, що відношення $\leqslant$ коректно визначене. Тепер, коли M - будь-яка лінійно впорядкована /віднос $\leqslant$ / підмножина із L' і $L_0 \in \bigcup M$, де $\bigcup M$ - об"єднання елементів із множини M, то $L_0 \in L'$. Доведемо це.

Нехай (x,y), (x,y_1) - довільні елементи із L_0. Тоді знайдуться два такі відображення L_1, L_2 із M, що

$$L_1(x)=y, \qquad L_2(x)=y_1.$$

А оскільки множина M лінійно впорядкована і, як наслідок, наприклад, $L_1 \leqslant L_2$, то $L_2(x)=y$. Звідси, враховуючи, що L_2 - відображення, маємо $y=y_1$ і, отже, L_0 - це теж відображення. Аналогічно, коли $L_0(x_1)=y_1$, $L_0(x_2)=y_2$, то знайдеться таке відображення $L_3 \in M$, що $L_3(x_1)=y_1$, $L_3(x_2)=y_2$. Крім того, оскільки L_3 - гомоморфізм, то $L_3(x_1x_2)=y_1y_2$, а отже, $L_0(x_1x_2)=y_1y_2$. Це означає, що L_0 - гомоморфізм.

Далі, якщо $L_0(x_1)=y_1$, то $L_3(x_1)=y_1$ для деякого $L_3 \in M$, а отже, $(x_1,y_1) \in S$ або, іншими словами, $L_0 \subset S$. Тому $L_0 \in L'$ і внаслідок леми Цорна в L' знайдеться хоча б один максимальний елемент; позначимо його через R_2.

Покажемо, що $D(R_2)=X$. Справді, якщо $D(R_2)$ власна підгрупа в X, то деякий елемент $\bar{x} \in X$ лежить поза підгрупою $D(R_2)$, а тому $X_1 = < \bar{x}^k x \mid x \in D(R_2) >$ - така підгрупа групи X, що містить власну підгрупу $D(R_2)$. Нехай γ - таке мінімальне невід"ємне ціле число, що $\bar{x}^\gamma \in D(R_2)$.
Тоді кожен елемент $z \in X_1 - X$ однозначно записується у вигляді $\bar{x}^k x$ для деяких $x \in D(R_2)$, $k \in \mathbb{Z}$, причому $k < \gamma$. Дійсно, коли $z = \bar{x}^k x_1 = \bar{x}^t x_2$, де k, t - різні цілі числа /можна вважати, що $k>0$, $t>0$), $k<\gamma$, $t<\gamma$ і, наприклад, $k \geqslant t$, а $x_1, x_2 \in D(R_2)$, то $\bar{x}^{k-t} \in D(R_2)$, причому $k-t<\gamma$. Звідси, зважаючи на мінімальний вибір γ, $k=t$. Визначимо тепер відображення $L_4 : X_1 \longrightarrow Y$ так, щоб $L_4(\bar{x}^k x) = \bar{y}^k R_2(x)$, де $(\bar{x},\bar{y}) \in S$; $x \in D(R_2)$.
Тоді, очевидно, L_4 - гомоморфізм і

$$\{(z, L_4(z)) \mid z \in X_1\} \subset S,$$

R_2 власним чином міститься в L_4, а це суперечить максимальному вибору $R_2 \in L'$. Звідси випливає, що $D(R_2)=X$ і R_2 - шуканий гомоморфізм.

Приймемо $C=\{(e,y)/(e,y)\in S\}$, де e – нейтральний елемент групи X . Очевидно, C – абелева група, якщо операцію визначити таким чином:

$$(e,y)(e,y')=(e,yy') \quad , \text{ де } y,y'\in Y.$$

Нехай $R_1: C\to Y$ – таке відображення, що $R_1((e,y))=y$. Тоді, очевидно, R_1 – гомоморфізм. Позначимо $R(c,x)=R_1(c)R_2(x)$. Покажемо, що $S=S'$, де $S=\{(x,y)/(\exists c\in C)[y=R(c,x)]\}$. Припустимо $(x,y)\in S$. Тоді $(x,R_2(x))\in S'$, а оскільки S – групова система, то

$$(x,y)(x,R_2(x))^{-1}=(e,y(R_2(x))^{-1})\in S.$$

Тому знайдеться такий елемент $c\in C$, що $y=R_1(c)R_2(x)$, тобто $S\subseteq S'$. Навпаки, припустимо $(x,R_1(c)R_2(x))\in S'$. Тоді, враховуючи, що $(e,R_1(c))\in S$, $(x,R_2(x))\in S$ і система S – групова, одержуємо

$$(x,R_2(x))\cdot(e,R_1(c))=(x,R_1(c)R_2(x))\in S.$$

Отже, $S'\subseteq S$ і, таким чином, $S'=S$. Теорема доведена.

Означення 2. Нехай $S\subset X\times Y$ – групова система, а $R: C\times X\to Y$ – відображення. Тоді R називається груповою глобальною реакцією в тому і лише в тому випадку, коли:

1/ C – абелева група;

2/ відображення R узгоджується із системою S , тобто

$$(x,y)\in S \Longleftrightarrow (\exists c\in C)\ [y=R(c,x)];$$

3/ існує два таких гомоморфізми $R_1: C\to Y$, $R_2: X\to Y$, що для довільних $(c,x)\in C\times X$ $R(c,x)=R_1(c)R_2(x)$.

У випадку групової системи S за аналогії з [2] називаємо: C – групою глобальних станів системи S ; гомоморфізм $R_1: C\to Y$ – глобальною реакцією на стан, а гомоморфізм $R_2: X\to Y$ – глобальною реакцією на вхід.

Тепер із теореми 1 випливає така теорема.

Теорема 1*. Система S групова тоді і лише тоді коли для неї існує групова глобальна реакція R .

1. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. М., 1974. 2. Месарович М., Такахара Я. Общая теория систем. Математические основы. М., 1978.

Стаття надійшла до редколегії 23.03.87

УДК 512.8

В.Р.Зелісько

ЄДИНІСТЬ УНІТАЛЬНИХ ДІЛЬНИКІВ МАТРИЧНОГО МНОГОЧЛЕНА

Нехай $A(x)$ – неособлива поліноміальна $n\times n$-матриця з елементами із $\mathbb{C}[x]$, яку запишемо у вигляді матричного многочлена

$$A(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_m. \qquad /1/$$

Відомо [1], для $A(x)$ існують такі оборотні над $\mathbb{C}[x]$ матриці $P(x)$ і $Q(x)$, що

$$P(x)A(x)Q(x)=\operatorname{diag}(\varepsilon_1(x),\ldots,\varepsilon_n(x)), \qquad /2/$$

де $\varepsilon_i|\varepsilon_{i+1}$, $i=1,2,\ldots,n-1$. Матрицю $\operatorname{diag}(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ називають формою Сміта матричного многочлена $A(x)$.

У праці [4] знайдені необхідні та достатні умови зображення матричного многочлена /1/ у вигляді

$$A(x)=B(x)C(x), \qquad /3/$$

де $B(x)=Ex^r+B_1x^{r-1}+\ldots+B_r$ /E – одинична матриця n-го порядку/ – унітальний матричний многочлен степеня r $(0<r<m)$ з формою Сміта $\operatorname{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$. Необхідною умовою такого зображення є $\varphi_k|\varepsilon_k$, $k=1,2,\ldots,n$ [4].

Використовуючи властивості матриці значення поліноміальної матриці на системі коренів многочлена $M_{G(x)}(\varphi)$ /її означення і властивості наведені у [4]/, на основі теореми 1. 3 праці [4] одержуємо такі теореми.

Теорема 1. Матричний многочлен /1/ зображається у вигляді /3/ тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\operatorname{rang} M_{V(x)P(x)\|E,Ex,\ldots,Ex^{r-1}\|}(\varphi_n)=nr,$$

де

$$V(x)=\left\|\begin{matrix}\frac{\varphi_n}{\varphi_1} & & & 0\\ \frac{\varphi_nk_{21}}{(\varphi_2,\varepsilon_1)} & \frac{\varphi_n}{\varphi_2} & & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \frac{\varphi_nk_{n1}}{(\varphi_n,\varepsilon_1)} & \frac{\varphi_nk_{n2}}{(\varphi_n,\varepsilon_2)} & \ldots\ \frac{\varphi_nk_{n,n-1}}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})} & 1\end{matrix}\right\|,$$

(ψ_i, ε_j) – найбільший спільний дільник многочленів ψ_i і ε_j, $P(x)$ – довільна оборотна матриця зі співвідношення /2/,

$$k_{ij} = \begin{cases} 0 & , \text{якщо } (\psi_i, \varepsilon_j) = \psi_j, \\ k_{ij0} + k_{ij1}x + \ldots + k_{ijh_{ij}} x^{h_{ij}} & , \text{якщо } (\psi_i, \varepsilon_j) \neq \psi_j; \end{cases}$$

$$h_{ij} = \deg \frac{(\psi_i, \varepsilon_j)}{\psi_j} - 1, \quad i = 2, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, n-1,$$

$i > j$; k_{ijs} – попарно різні змінні величини, приєднані до поля $\mathbb{C}$, $s = 0, 1, \ldots, h_{ij}$.

Зауваження. В умовах теореми 1 коефіцієнти унітального дільника $B(x) = Ex^r - B_1 x^{r-1} - \ldots - B_r$ можна знайти як розв"язки $X_1 = B_1, \ldots, X_r = B_r$ лінійного матричного рівняння.

$$M_{F_{r-1}(x)}(\psi_n) \left\| \begin{matrix} X_r \\ \vdots \\ X_1 \end{matrix} \right\| = M_{V(x)P(x)x^r}(\psi_n), \qquad /4/$$

де $F_{r-1}(x) = V(x)P(x) \| E, Ex, \ldots, Ex^{r-1} \|$.

Дослідимо тепер питання про єдиність унітального многочлена $B(x)$.

Теорема 2. У зображенні матричного многочлена /1/ у вигляді /3/ унітальний множник $B(x)$ єдиний з формою Сміта $\operatorname{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ тоді і тільки тоді, коли $(\psi_i, \varepsilon_j) = \psi_j$ для всіх $i > j$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

Доведення. Необхідність. Нехай $A(x) = B(x)C(x)$, причому $(\psi_i, \varepsilon_j) \neq \psi_j$ хоча б для однієї пари i та j. Тоді в матриці $V(x)$ хоча б одна змінна k_{ijs} не дорівнює нулю. Згідно зі зробленим вище зауваженням коефіцієнти множника $B(x)$, знайдені як розв"язки лінійного матричного рівняння /4/, також залежать від цієї змінної, яка може приймати нескінченну множину допустимих значень із поля $\mathbb{C}$. Таким чином, матричний многочлен /1/ має нескінченну множину унітальних дільників з формою Сміта $\operatorname{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$.

Достатність. Нехай матричний многочлен /1/ зображається у вигляді /3/, причому його форма Сміта відповідно факторизується так:

$$\mathrm{diag}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=\mathrm{diag}(\varphi_1,\dots,\varphi_n)\,\mathrm{diag}(\psi_1,\dots,\psi_n).$$

Оскільки $(\varphi_i,\varepsilon_j)=\varphi_i$, то $((\varphi_i/\varphi_j),\psi_j)=1$. Тоді існують такі $f,g\in\mathbb{C}[x]$, що $(\varphi_i/\varphi_j)f+\psi_j g=1$. Звідси одержуємо рівність

$$(\varphi_i\psi_i/\varphi_j)f+\psi_i\psi_j g=\psi_i,$$

з якої

$$(\psi_i/\psi_j)=(\varepsilon_i/\varepsilon_j)f+\psi_i g,$$

тобто $(\psi_i/\psi_j)\in\mathbb{C}[x]$. Отже, матриця $\mathrm{diag}(\psi_1,\dots,\psi_n)$ є формою Сміта правого дільника $C(x)$, тобто при умові $(\varphi_i,\varepsilon_j)=\varphi_i$ форма Сміта матричного многочлена /I/ дорівнює добутку форм Сміта його дільників. Згідно з теоремою 5 із праці [3] унітальний множник $B(x)$ – єдиний із формою Сміта $\mathrm{diag}(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$.

<u>Наслідок</u>. Якщо матричний многочлен має унітальний дільник із заданою формою Сміта, то він або єдиний з цією формою Сміта, або таких дільників в нього нескінченна кількість.

Зауважимо, що теорема 2 узагальнює результат праці [2] про виділення унітального дільника зі заданим характеристичним многочленом.

Згідно з узагальненою теоремою Безу [1], якщо матричний многочлен /I/ зображається у вигляді $A(x)=(Ex-B)C(x)$, то матриця B є розв"язком матричного рівняння

$$X^m A_0+X^{m-1}A_1+\dots+A_m=0. \qquad /5/$$

Тому, використовуючи теореми I і 2, можна виявити, чи має матричне рівняння /5/ єдиний із наперед заданою жордановою формою розв"язок. Якщо /5/ має розв"язок, що не єдиний із заданою жордановою формою, то рівняння /5/ володіє нескінченною множиною таких розв"язків.

I. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1966. 2. Грига Б.С., Казимирский П.С. К вопросу о единственности выделения унитального множителя из матричного многочлена // Теорет. и прикладные вопросы алгебры и диф. уравнений. К., 1976. С. 15-18. 3. Зелиско В.Р. Вопросы факторизации матричных многочленов // Мат. методы и физ.-мат. поля.1983. Вып. 17. С.28-33. 4. Казімірський П.С. Розклад матричних многочленів на множники. К., 1981.

Стаття надійшла до редколегії 23.03.87

УДК 512.552.12

М.Я.Комарницький, Б.В.Забавський

ПРО АДЕКВАТНІ КІЛЬЦЯ

Адекватні кільця вперше розглянуто в [2]. Ми продовжуємо їх вивчення з допомогою поняття адекватного елемента. Наш основний результат стверджує, що комутативна область Безу адекватна тоді і тільки тоді, коли довільний її ненульовий простий ідеал містить хоча б один адекватний елемент. Для доведення цього твердження необхідно нагадати деякі означення і факти з [4].

Комутативне кільце з $1 \neq 0$ називається кільцем Безу, якщо для будь-яких елементів $a, b \in R$ ідеали $aR + bR$ і $aR \cap bR$ є головними. Очевидно, що в кільці Безу довільний скінченно-породжений ідеал є головним. Якщо R -область цілісності, то друга умова - це наслідок першої [1]. Під кільцем розумітимемо комутативне кільце з $1 \neq 0$. Назвемо ненульовий елемент a кільця R адекватним, якщо для кожного елемента $b \in R$ знайдуться такі елементи $r, s \in R$, що: 1/ $a = r \cdot s$; 2/ $rR + bR = R$; 3/ для будь-якого $s' \in R$ з включення $sR \subset s'R \neq R$ випливає, що ідеал $s'R + bR$ властивий. Кільце, в якому кожний ненульовий елемент адекватний, називається адекватним. Легко переконатися, що прикладом адекватних елементів можуть бути одиниці кільця або атоми кільця.

Назвемо властивий ідеал кільця адекватним, якщо він містить хоча б один адекватний елемент. Позначимо через H множину всіх неадекватних властивих ідеалів кільця R. Оскільки $0 \in H$, то множина H непорожня. Нехай $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ - довільний ланцюг ідеалів з множини H. Розглянемо ідеал $I = \bigcup I_\alpha$. Якщо $I \notin H$, то існує адекватний елемент $a \in I$ $\alpha \in \Omega$. Отже, наявний такий індекс $\beta \in \Omega$, що $a \in I_\beta$. Таким чином, I_β - адекватний ідеал. Останнє суперечить припущенню $I_\beta \in H$, і тому $I \in H$. Ми виявили, що множина H індукована. За лемою Цорна в H існує хоча б один максимальний елемент. Такий ідеал $I \in H$ називатимемо максимально неадекватним. Отже, справедливий такий результат.

<u>Твердження 1.</u> Довільний неадекватний ідеал міститься хоча б в одному максимально неадекватному ідеалі.

Позначимо через $A(R)$ множину всіх адекватних елементів кільця R.

Твердження 2. Кожний максимально неадекватний ідеал P кільця R є простим ідеалом.

Доведення. Поведемо його від супротивного. Нехай існують такі елементи $a, b \in R \setminus P$, що $a \cdot b \in P$. Розглянемо ідеал $P + aR$. Оскільки $a \notin P$ і P – максимально неадекватний ідеал, то існує такий елемент $c \in A(R)$, що $c \in P + aR$. Розглянемо ідеал $J = \{x / cx \in P\}$. Очевидно, що $P \subset J$, причому $J \neq P$, оскільки $b \in J$ і $b \notin P$. Отже, існує такий елемент $d \in A(R)$, що $d \in J$. Беручи до уваги визначення ідеалу J, бачимо $c \cdot d \in P$, тобто ідеал P містить добуток двох адекватних елементів. Переконаємся, що $c \cdot d$ – адекватний елемент.

Нехай k – довільний елемент кільця R. Тоді існують такі елементи $r, m, t, l \in R$, для яких $c = r \cdot m$, $d = t \cdot l$, $rR + kR = R$, причому для будь-яких m', l' з включення $mR \subseteq m'R \neq R$, $lR \subseteq l'R \neq R$ випливають співвідношення $m'R + kR \neq R$, $l'R + kR \neq R$. Таким чином, $rtR + kR = R$ і для будь-якого $n' \in R$ з умови $mlR \subseteq n'R \neq R$ отримуємо $mlR + n'R \subseteq (mR + nR)(lR + nR) \neq R$. Тому $mlR + n'R \neq R$. Отже, $c \cdot d \in A(R)$. Ми довели, що ідеал P містить деякий адекватний елемент, а це суперечить висловленому на початку доведення припущенню. Твердження доведено.

Надалі через R позначатимемо комутативну область Безу. Доведемо, що в області R будь-який дільник адекватного елемента адекватний. Нехай $a \in A(R)$ і $a = d \cdot x$, $x \in R$, $d \in R$. Тоді для будь-якого елемента $c \in R$ існують такі $r, m \in R$, що $a = r \cdot m$, $rR + cR = R$. З умови $mR \subseteq m'R \neq R$ випливає $m'R + cR \neq R$. Нехай $h = (d, r)$ – найбільший спільний дільник елементів d і r. Тоді $d = d_0 h$, $r = r_0 h$, $r_0, d_0 \in R$, причому $hd \cdot x = h r_0 m$. Отже, $d_0 x = r_0 m$. Оскільки $d_0 R + r_0 R = R$, то $mR \subseteq d_0 R$. Якщо тепер $d_0 R \subseteq d_0' R \neq R$, то d_0 можна взяти в якості m' і отримати $d_0 R + cR \neq R$. Враховуючи $hR + cR = R$, бачимо, що розклад $d = d_0 \cdot h$ має властивості, описані у визначенні адекватного елемента. Таким чином, d – адекватний елемент області R.

Теорема. Комутативна область Безу адекватна тоді і лише тоді, коли довільний її ненульовий простий ідеал містить хоча б один адекватний елемент.

Доведення. Припустимо, що в області R існують неадекватні елементи, а кожний ненульовий простий ідеал містить принаймні один адекватний елемент. Нехай a-ненульовий неадекватний елемент. Якщо ідеал aR містить деякий адекватний елемент $b \in R$, то $b = ax$, $x \in R$. Звідси випливає, що елемент a адекватний, як дільник елемента b. Отже, ідеал aR не містить жодного адекватного елемента. З огляду на твердження I ідеал aR міститься в деякому максимально неадекватному ідеалі P. Внаслідок твердження 2 P - простий ідеал. Таким чином, P містить деякий адекватний елемент, а це суперечить неадекватності ідеалу P. Звідси випливає, що в кільці R немає ненульових неадекватних елементів. Обернена імплікація очевидна.

Використовуючи результати праці [3], можемо довести таке твердження.

<u>Твердження 3.</u> Нехай P - простий ідеал області R, який містить хоча б один адекватний елемент. Тоді P міститься в одному і тільки одному максимальному ідеалі кільця.

<u>Доведення</u>. Якщо P - максимальний ідеал, то все очевидно. Нехай P не максимальний ідеал кільця R і $a \in P$, де $a \in A(R)$. Припустимо, що існують два різні максимальні ідеали M_1 і M_2, які містять ідеал P. Оскільки M_1 і M_2 різні, то існують такі елементи $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$, що $m_1R + m_2R = R$. Коли $a = z \cdot s$, де $zR + m_1R = R$, і для будь-якого необоротного дільника s' елемента s ідеал $s'R + m_1R$ властивий, то $s \in P$ /оскільки P - простий ідеал і $P \subset M_1$ /. Нехай $d = (s, m_2)$. Тому що $P \subset M_2$, то d необоротний дільник елемента s. Але $dR + m_1R \supset m_2R + m_1R = R$. Отже, $a \notin A(R)$. Отримана суперечність з вибором елемента a доводить наше твердження.

<u>Твердження 4.</u> Кожний елемент, який не міститься в жодному максимально неадекватному ідеалі, є адекватним елементом.

<u>Доведення</u>. Нехай елемент a не міститься в жодному максимально неадекватному ідеалі і $a \notin A(R)$. Якщо всі елементи ідеалу aR неадекватні, то згідно з твердженням I він, а значить і елемент a, міститься в деякому максимально неадекватному ідеалі. Це суперечить вибору елемента a. Отже, aR містить деякий адекватний елемент b. Оскільки $b = a \cdot z$, то $a \in A(R)$.

Позначимо через $S(R)$ перетин всіх максимально неадекватних ідеалів кільця R.

<u>Твердження 5</u>. Нехай $b \in S(R)$ і $a \in A(R)$.
Тоді для довільного $x \in R$ елемент $a + bx$ є адекватним.

Доведення. Нехай $z = a + bx \in A(R)$. Очевидно, що ідеал $(a+bx)R$ неадекватний. Тому існує максимально неадекватний ідеал N, який містить е змент $a+bx$. Оскільки $b \in S(R)$, то $a = z - bx \in N$. Це неможливо, тому що $a \in A(R)$. Отримана суперечність доводить наше твердження.

Твердження 6. Нехай I – такий ідеал кільця R, що для будь-яких $i \in I$, $a \in A(R)$ елемент $i + a$ адекватний. Тоді $I \subseteq S(R)$.

Доведення. Припустимо, що існує максимально неадекватний ідеал P кільця R, який задовольняє умову $(I+P) \cap A(R) \neq \phi$. Якщо $a \in (I+P) \cap A(R)$, то $a = p - i$, де $p \in P$.

Згідно з твердженням 5, $a + i = p \in A(R)$. Оскільки P не містить адекватних елементів, то отримуємо суперечність, яка доводить твердження.

Твердження 7. Наступні твердження еквівалентні:
1/ в кільці R існує єдиний максимально неадекватний ідеал N;
2/ сума будь-яких двох неадекватних елементів є неадекватним елементом.

Доведення: 1/→2/. Припустимо, що існують неадекватні елементи a і $b \in R$, сума яких $a+b$ адекватний елемент. Оскільки $a, b \notin A(R)$, то $a, b \in N$. N – ідеал, отже, $a + b \in N$. З іншого боку, $a + b \in A(R)$. Отримана суперечність доводить цю імплікацію. Імплікація 2/→1/ очевидна з огляду на те, що добуток будь-якого неадекватного елемента на довільний елемент кільця неадекватний елемент.

Існування кілець, які задовольняють умови твердження 7, можна виявити на конкретному прикладі. А саме, в якості такого кільця можна взяти підкільце кільця формальних степеневих рядів з комутуючою змінною над полем раціональних чисел, яке складається з рядів з цілим вільним членом /детальніше див. працю [3].

Зауваження. Результати нашої статті пов"язані з дослідженнями, які викладені у праці [4]. Зокрема доведена теорема є аналогом результату з [4], який свідчить, що комутативна область цілісності є факторіальною тоді і тільки тоді, коли кожний її ненульовий простий ідеал містить хоча б один простий елемент.

1. A m i t s u r S.A. Remarks of principal ideal rings // Osaka Math. J. 1963. N 15. P.59-69. 2. H e l m e r O. The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions // Bull. Amer. Math. Soc. 1943. N 49. P. 225-236. 3. H e n r i k s e n M. Some remarks about elementary divisor rings // Math. J. 1955. Vol.56. N 3. P. 362-365. 4. K a p l a n s k y J. Commutative rings // Boston. 1972.

Стаття надійшла до редколегії 23.02.87

УДК 517.958:536.12

Є.Г.Грицько, Р.В.Гудзь, Р.З.Букавіна

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ УСТАЛЕНОГО РОЗВ"ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПЕРЕНОСУ В ЛОКАЛЬНО-НЕОДНОРІДНІЙ ОБЛАСТІ

Розглянемо двомірну область $\Omega = \{(x_1, x_2): x_i^- < x_i < x_i^+,\ x_i^- = 0,\ x_i^+ = \pi,\ i = 1,2\}$, в якій поведінка фізичної величини θ описується рівнянням

$$(\partial/\partial x_1)(\lambda(x_1,x_2)(\partial\theta/\partial x_1)) + (\partial/\partial x_2)(\lambda(x_1,x_2)(\partial\theta/\partial x_2)) = \frac{\partial\theta}{\partial F_0} - \omega. \quad /1/$$

Нехай θ задовольняє граничні умови

$$\theta\Big|_{x_i = x_i^\pm} = 0, \quad i = 1,2. \quad /2/$$

Вважатимемо, що

$$\lambda(x_1,x_2) = \lambda_0 + \lambda_g(x_1,x_2)\chi_g,$$

$$\omega = (\omega_c \cos \zeta_\tau F_0 + \omega_s \sin \zeta_\tau F_0)\chi_\omega, \quad /3/$$

де χ_g - характеристична функція області $\Omega_g = \{(x_1, x_2): x_i^- < x_{gi}^- < x_i < x_{gi}^+ < x_i^+,\ i = 1,2\}$, χ_ω - характеристична функція області $\Omega_\omega = \{(x_1,x_2): x_i^- < x_{\omega i}^- < x_i < x_{\omega i}^+ < x_i^+,\ i = 1,2\}$ такої, що $\Omega_\omega \cap \Omega_g = \emptyset$, $\operatorname{supp} \lambda_g = \Omega_g$.

Використовуючи /3/ в /1/, записуємо

$$\Delta\theta - \frac{\partial\theta}{\partial F_0} = P_g\theta - \omega, \quad /4/$$

де
$$P_q = -\Lambda_q^{-1}\sum_{i=1}^{2}(\partial\Lambda_q/\partial x_i)(\partial/\partial x_i)\,\chi_q; \quad \Lambda_q = \lambda_q/\lambda_0;$$
$$\Delta = (\partial^2/\partial x_1^2) + (\partial^2/\partial x_2^2).$$

З метою одержання розв"язку задачі /4/, /2/ розглянемо крайову задачу
$$\Delta\theta_u - (\partial\theta_u/\partial F_0) = P_q\theta_u - W_u, \qquad /5/$$
$$\theta_u\Big|_{x_i = x_i^{\pm}} = 0, \quad i = 1, 2, \qquad /6/$$
де
$$\theta_u = (\theta_c + i\theta_s)e^{-i\zeta_\tau F_0} = u\,e^{-i\zeta_\tau F_0};$$
$$W_u = (\omega_c + i\omega_s)e^{-i\zeta_\tau F_0} = W e^{-i\zeta_\tau F_0},$$
дійсна частина розв"язку θ_u якої збігається з усталеним розв"язком задачі /4/, /2/ [2]. На основі /5/, /6/ для визначення u маємо
$$\Delta u + i\zeta_\tau u = P_q u - W, \qquad /7/$$
$$u\Big|_{x_i = x_i^{\pm}} = 0, \quad i = 1, 2. \qquad /8/$$
Виберемо M базових функцій $\psi_m(x_1, x_2)$ і зобразимо наближення розв"язку задачі /7/, /8/ в області Ω_q у вигляді
$$u_q = \sum_{m=1}^{M} d_m\psi_m(x_1, x_2), \qquad /9/$$
де d_m - невідомі коефіцієнти. Внаслідок використання /9/ у правій частині /7/ [1, 4] крайова задача /7/, /8/ зводиться до такої задачі відносно u^* :
$$\Delta u^* + i\zeta_\tau u^* = \sum_{m=1}^{M} d_m P_q\psi_m - W, \qquad /10/$$
$$u^*\Big|_{x_i = x_i^{\pm}} = 0, \quad i = 1, 2. \qquad /11/$$
Двічі застосуємо до /10/ з врахуванням /11/ скінченне синус-перетворення Фур"є по змінних x_1 та x_2 . Тоді
$$(i\zeta_\tau - \zeta_1^2 - \zeta_2^2)\bar{\bar{u}}^* = \sum_{m=1}^{M} d_m\overline{\overline{P_q\psi_m}} - \overline{\overline{W}}, \qquad /12/$$
де $\overline{\overline{P_q\psi_m}} = \int_{x_{q1}^-}^{x_{q1}^+} dx_1 \int_{x_{q2}^-}^{x_{q2}^+} P_q\psi_m \sin\zeta_1 x_1 \sin\zeta_2 x_2\, dx_2, \; m = \overline{1, M};$

$$\overline{W}=\int\limits_{x_{\omega 1}^-}^{x_{\omega 1}^+} dx_1 \int\limits_{x_{\omega 2}^-}^{x_{\omega 2}^+} W \sin\zeta_1 x_1 \sin\zeta_2 x_2 \, dx_2 ;$$

$$\zeta_i = n_i \pi / x_i^+ , \quad n_i \in N \quad (i=1,2).$$

Визначивши $\overline{\overline{U}}^*$ з /12/ і перейшовши до оригіналу, одержимо

$$u^* = u_\omega^* - \sum_{m=1}^{M} d_m u_m^* ,$$

де

$$u_\omega^* = 4/(x_1^+ x_2^+) \sum_{n_1, n_2 = 1}^{\infty} (A + iB) \overline{W} \sin\zeta_1 x_1 \sin\zeta_2 x_2 ;$$

$$u_m^* = 4/(x_1^+ x_2^+) \sum_{n_1, n_2 = 1}^{\infty} (A + iB) \overline{\overline{P_g \psi_m}} \sin\zeta_1 x_1 \sin\zeta_2 x_2 , \quad m = \overline{1, M} ;$$

$$A = (\zeta_1^2 + \zeta_2^2) C^{-1} ; \quad B = \zeta_\tau C^{-1} ; \quad C = (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^2 + \zeta_\tau^2 .$$

Тоді, згідно з [2], $Q^* = Re(u^* e^{-i\zeta_\tau F_0})$, тобто

$$\theta^* = \theta_A \sin(\zeta_\tau F_0 + \varphi). \qquad /13/$$

Тут введено позначення $\theta_A = \sqrt{P^2 + Q^2}$, $\varphi = \arcsin(P/\theta_A)$,

$$P = 4/(x_1^+ x_2^+) \sum_{n_1, n_2 = 1}^{\infty} A (\overline{W} - \sum_{m=1}^{M} d_m \overline{\overline{P_g \psi_m}}) \sin\zeta_1 x_1 \sin\zeta_2 x_2 ,$$

$$Q = 4/(x_1^+ x_2^+) \sum_{n_1, n_2 = 1}^{\infty} B (\overline{\overline{W}} - \sum_{m=1}^{M} d_m \overline{\overline{P_g \psi_m}}) \sin\zeta_1 x_1 \sin\zeta_2 x_2 .$$

Розіб"ем область Ω_g на M елементів Ω_{gi} таких, що $\Omega_g \bigcup_{i=1}^{M} \Omega_{gi}$ і $\Omega_{gi} \cap \Omega_{gj} = \phi$ при $i \neq j$. Коефіцієнти d_m визначимо з умов ортогональності нев"язки $\tau_M(x_1, x_2) = U_g - U^*$ характеристичним функціям елементів розбиття [3]

$$\sum_{m=1}^{M} d_m \iint\limits_{\Omega_{gi}} (\psi_m + u_m^*) dx_1 dx_2 = \iint\limits_{\Omega_{gi}} u_\omega^* dx_1 dx_2 , \quad i = \overline{1, M} . \qquad /14/$$

Таким чином, усталений розв'язок задачі /4/, /2/ виражається за формулою /12/ з використанням розв"язку $d = (d_1, d_2, \ldots, d_M)$ системи рівнянь /13/.

Числові розрахунки проводили для $x_2^+ = \pi$;

$$x_{g1}^{\pm} = (\pi/2) \pm 0{,}4 ; \quad x_{g2}^- = (\pi/2) + 0{,}35 ; \quad x_{g2}^+ = (\pi/2) + 0{,}75 ;$$

$$x_{\omega 1}^{\pm} = (\pi/2) \pm 0{,}3 ; \quad x_{\omega 2}^{\pm} = (\pi/2) \pm 0{,}3 ; \quad \omega_s = \omega_c = 0{,}125 ; \quad \zeta_\tau = 1 ;$$

$$\Lambda_q = exp(c_\lambda f_{\lambda 1} f_{\lambda 2}); \quad f_{\lambda i} = \sin\left(\pi (x_i - x_{qi}^-)/(x_{qi}^+ - x_{qi}^-)\right), \quad i = 1,2.$$

Отже, з ростом коефіцієнта λ в Ω_q величина ψ в області $\Omega_c = \{(x_1, x_2): x_{\omega 1}^- < x_1 < x_{\omega 1}^+,\ x_{\omega 2}^+ < x_2 < x_{q2}^-\}$ зростає, а в області $\Omega_0 = \{(x_1, x_2): x_{q1}^- < x_1 < x_{q1}^+,\ x_{q2}^+ < x_2 < x_2^-\}$ - спадає.

1. Грицько Е.Г., Гудзь Р.В. Нагрев полого цилиндра с кольцевым включением трапециедального сечения // Мат. методы и физ.-мех. поля. К., 1985. Вып. 22. С. 106-109. 2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., 1964. 3. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М., 1981. 4. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М., 1984.

Стаття надійшла до редколегії 20.04.87

УДК 515.12

Т.О.Банах

ПРО ПРОДОВЖЕННЯ ПСЕВДОМЕТРИК НА ПРОСТІР ІМОВІРНІСНИХ МІР

Нехай X - компакт і $P(X)$ - простір імовірнісних мір на X, наділений $*$ - слабою топологією. Конструкція простору імовірнісних мір функторіальна в категорії $Comp$ компактів і неперервних відображень [2]. Позначимо через $\eta = [\eta_X]$ природне перетворення тотожного функтора Id в функтор P [1].

Для метричного компакта (X, d) простір $P(X)$ метризується так: якщо $\mu, \nu \in P(X)$, то $\bar{d}(\mu,\nu) = \inf\{\lambda(d) \mid \lambda \in P(X \times X), P(pr_1)(\lambda) = \mu, P(pr_2)(\lambda) = \nu\}$ ($pr_i : X \times X \to X$ - проекція на i-й співмножник). В.В.Федорчук розглянув метричну пряму границю $F(X)$ послідовності

$$X \xrightarrow{\eta_X} P(X) \xrightarrow{\eta_{P(X)}} P(P(X)) \xrightarrow{\eta_{P^2(X)}} \ldots$$

і встановив ряд геометричних властивостей одержаного функтора F, його поповнення та компактифікації.

Постає задача продовження розглянутого функтора з категорії $\mu Comp$ метризованих компактів на категорію $Comp$. М.М.Зарічний запропонував будувати таке продовження за допомогою псевдометрик.

У цій праці покажемо можливість продовження сім"ї псевдометрик з простору X на простір імовірнісних мір $P(X)$ так, що при цьому одержана сім"я псевдометрик задаватиме $*$-слабу топологію на $P(X)$.

Для кожної неперервної псевдометрики $d: X \times X \to R$ означимо функцію $\bar{d}: P(X) \times P(X) \to \mathbb{R}$ за формулою $\bar{d}(\mu, \nu) = \inf\{\lambda(d) \mid \lambda \in P(X \times X),\ P(pr_1)(\lambda) = \mu,\ P(pr_2)(\lambda) = \nu\}$.

<u>Твердження</u>. Функція $\bar{d}$-неперервна псевдометрика на $P(X)$.

<u>Доведення</u>. Нехай $\mu \in P(X)$ і $\lambda = P(\Delta)(\mu)$, де $\Delta: X \to X \times X$ - діагональне вкладення. Тоді, очевидно, $P(pr_1)(\lambda) = P(pr_2)(\lambda) = \mu$. Отже, $\bar{d}(\mu, \mu) \leq \lambda(d) = 0$.

Нехай $\sigma: X \times X \to X \times X$ - відображення, що переставляє координати. Тоді для кожного $\lambda \in P(X \times X)$ $P(pr_1)(P(\sigma)(\lambda)) = P(pr_2)(\lambda)$ і $P(pr_2)(P(\sigma)(\lambda)) = P(pr_1)(\lambda)$, звідки випливає симетричність функції $\bar{d}$.

Нехай тепер $\mu, \nu, \xi \in P(X)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in P(X \times X)$ такі, що $\bar{d}(\mu, \nu) = \lambda_1(d)$, $\bar{d}(\nu, \xi) = \lambda_2(d)$ і $P(pr_1)(\lambda_1) = \mu$, $P(pr_2)(\lambda_1) = P(pr_1)(\lambda_2) = \nu$, $P(pr_2)(\lambda_2) = \xi$. З бікомутативності функтора P [2] випливає існування такого $\lambda^* \in P(X \times X \times X)$, коли $P(pr_{12})(\lambda^*) = \lambda_1$, $P(pr_{23})(\lambda^*) = \lambda_2$ /$pr_{ij}: X \times X \times X \to X \times X$ - проектування на добуток i-го та j-го співмножників/. Приймемо $\lambda = P(pr_{13})(\lambda^*)$. Тоді $\bar{d}(\mu, \xi) \leq \lambda(d) = P(pr_{13})(\lambda^*)(d) = \lambda^*(d \circ pr_{13}) \leq$
$\leq \lambda^*(d \circ pr_{12} + d \circ pr_{23}) = \lambda^*(d \circ pr_{12}) + \lambda^*(d \circ pr_{23}) = P(pr_{12})(\lambda^*)(d) + P(pr_{23}) \times$
$\times (\lambda^*)(d) = \lambda_1(d) + \lambda_2(d) = \bar{d}(\mu, \nu) + \bar{d}(\nu, \xi)$.

Ми показали, що $\bar{d}$ -псевдометрика на $P(X)$.

Покажемо, що для кожного $\mu \in P(X)$ і будь-якої послідовності $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty} \subset P(X)$ такої, що $\{\mu_i\} \to \mu$, маємо $\{\bar{d}(\mu_i, \mu)\} \to 0$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і нехай $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ - скінченне розбиття одиниці, підпорядковане покриттю ε-кулями /відносно псевдометрики d /компакта X. Приймемо $M = \max\{d(x, y) \mid x, y \in X\}$. Існує таке $n_0 \in \mathbb{N}$, що для кожного $i \geq n_0$ маємо $|\mu_i(\varphi_j) - \mu(\varphi_j)| < (\varepsilon/2Mk)$ для всіх $j \leq k$; оберемо $i \geq n_0$. Нехай $\alpha_j = \min\{\mu_i(\varphi_j), \mu(\varphi_j)\}$. Тоді, очевидно, $1 - \alpha_1 - \ldots - \alpha_k < (\varepsilon/2M)$. Нехай τ_j - /не обов"язково імовірнісна/ додатна міра на X^2 така, що для кожної $\psi \in C(X^2)$ $\tau_j(\psi) = (\mu_i \otimes \mu)((\varphi_j \circ pr_1)(\varphi_j \circ pr_2)\psi)$.
Приймемо

$$\tilde{\tau}_j = \begin{cases} \tau_j / \|\tau_j\|, & \text{якщо} \quad \tau_j \neq 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad \tau_j = 0 \end{cases}$$

і $\lambda = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i \tilde{\tau}_i$. Тоді $P(pr_1)(\lambda) \leq \mu_i$, $P(pr_2)(\lambda) \leq \mu$. Існує імовірнісна міра $\tilde{\lambda} \in P(X^2)$ така, що $\lambda \leq \tilde{\lambda}$ і $P(pr_1)(\tilde{\lambda}) \mu_i$, $P(pr_2)(\tilde{\lambda}) = \mu$. Одержуємо $\bar{d}(\mu_i, \mu) \leq$ $\leq \tilde{\lambda}(d) = \lambda(d) + (\tilde{\lambda} - \lambda)(d) < (\varepsilon/2) + (M \cdot \varepsilon / 2M) = \varepsilon$, тобто $\bar{d}$ –неперервна. Теорема доведена.

Наступний результат подаємо без доведення.

Теорема. Нехай $\{d_\alpha\}$ – сім"я псевдометрик, що задає одностайну структуру на компакті X. Тоді сім"я $\{\bar{d}_\alpha\}$ задає одностайну структуру на просторі $P(X)$.

1. Федорчук В.В. Мягкие отображения, многозначные ретракции и функторы // Успехи мат. наук. 1986. Т.41. Вып.6. С.121-159. 2. Щепин Е.В. Функторы и несчетные степени компактов // Успехи мат. наук. 1981. Т.36. Вып. 3. С. 3-62.

Стаття надійшла до редколегії 23.03.87

УДК 539.377

Б.В.Процюк, В.М.Синюта

ФУНКЦІЯ ГРІНА СТАЦІОНАРНОЇ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ БАГАТОШАРОВОГО ЦИЛІНДРА

Для знаходження розв"язку задач теплопровідності часто застосовують метод граничних елементів [2]. Однак функції Гріна, на використанні яких базується цей метод, відомі лише для окремих задач.

Побудуємо функцію Гріна для області, яка складається з n - концентрично розміщених ідеально контактуючих безмежних циліндрів. Для цього застосуємо рівняння

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial G}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 G}{\partial \zeta^2} + \sum_{K=1}^{n-1} \frac{\lambda_{K+1} - \lambda_K}{\lambda_{K+1}} \frac{\partial G}{\partial \rho}\bigg|_{\rho = r_K - 0} \times \qquad /1/$$

$$\times\, \delta(\rho - r_K) = -(1/\rho \lambda(\rho))\, \delta(\rho - r)\, \delta(\zeta - z)$$

і граничні умови

$$\left[\lambda_n \frac{\partial G}{\partial \rho} + \alpha_n G\right]\bigg|_{\rho = r_n} = 0, \quad \left[\lambda_1 \frac{\partial G}{\partial \rho} - \alpha_1 G\right]\bigg|_{\rho = r_0} = 0, \qquad /2/$$

де

$$\lambda(\rho) = \lambda_1 + \sum_{K=1}^{n-1} (\lambda_{K+1} - \lambda_K) S(\rho - r_K);$$

λ_K, r_K — коефіцієнт теплопровідності та зовнішній радіус K -го шару; r_0 – внутрішній радіус першого шару; α_n, α_1 – коефіцієнти тепловіддачі відповідно зі зовнішньої і внутрішньої поверхні циліндра; $S(x)$ – функція Хевісайда; $\delta(x)$ – функція Дірака; $r \neq r_K$ / $K = 0, 1, \ldots, n$ /. Тут використана конструкція множення кусково-неперервних функцій і дельта-функцій Дірака [4] при $\beta = 1$.

Беручи до уваги симетричність функції Гріна по координаті ζ, надалі вважатимемо $z = 0$ і задачу /1/, /2/ розглядатимемо для напівбезмежного циліндра.

Застосуємо інтегральне косинус-перетворення Фур"є [3] по змінній ζ до рівняння /1/. Дістаємо диференціальне рівняння, розв"язком якого є функція

$$\bar{G}(r,\rho,\eta) = -(1/2\lambda(r))\,\psi_{0,0}(\rho,r)S(\rho-r) - \sum_{K=1}^{n-1}\left((\lambda_{K+1}-\lambda_K)/\lambda_{K+1}\right)\times$$
$$\times\, r_K\psi_{0,0}(\rho,r_K)(d\bar{G}/d\rho)\Big|_{\rho=r_K-0} S(\rho-r_K) + c_1 I_0(\eta\rho) + c_2 K_0(\eta\rho), \qquad /3/$$

де

$$\psi_{0,0}(x,y) = I_0(\eta x)K_0(\eta y) - K_0(\eta x)I_0(\eta y),$$

$I_\nu(x)$, $K_\nu(x)$ – модифіковані функції Бесселя / $\nu = 0, 1$/; η – параметр перетворення Фур"є.

Зобразимо значення похідної від функції $\bar{G}$ на стиках шарів у вигляді

$$\frac{d\bar{G}}{d\rho}\Big|_{\rho=r_K-0} = c_1 H_1^{(K)} + c_2 H_2^{(K)} + E^{(K)}(r). \qquad /4/$$

Підставимо /4/ у /3/. Формула для $\bar{G}$ набуває вигляду

$$\bar{G} = c_1\Big\{I_0(\eta\rho) - \sum_{K=1}^{n-1}\left((\lambda_{K+1}-\lambda_K)/\lambda_{K+1}\right) r_K\psi_{0,0}(\rho,r_K)H_1^{(K)}S(\rho-r_K)\Big\} +$$
$$+ c_2\Big\{K_0(\eta\rho) - \sum_{K=1}^{n-1}\left((\lambda_{K+1}-\lambda_K)/\lambda_{K+1}\right) r_K\psi_{0,0}(\rho,r_K)H_2^{(K)}S(\rho-r_K)\Big\} - \qquad /5/$$
$$-(1/2\lambda(r))\psi_{0,0}(\rho,r)S(\rho-r) - \sum_{K=1}^{n-1}\left((\lambda_{K+1}-\lambda_K)/\lambda_{K+1}\right) r_K\psi_{0,0}(\rho,r_K)E^{(K)}(r)S(\rho-r_K).$$

Визначаючи з /5/ $(d\bar{G}/d\rho)\big|_{\rho=r_K-0}$ і використовуючи /4/, одержуємо рекурентні співвідношення для знаходження $H_1^{(K)}$, $H_2^{(K)}$, $E^{(K)}(r)$:

$$H_1^{(k)}=\eta\left\{I_1(\eta r_k)-\sum_{m=1}^{k-1}\left((\lambda_{m+1}-\lambda_m)/\lambda_{m+1}\right)r_m\psi_{1,0}(r_k,r_m)H_1^{(m)}\right\},$$

$$H_2^{(k)}=\eta\left\{-K_1(\eta r_k)-\sum_{m=1}^{k-1}\left((\lambda_{m+1}-\lambda_m)/\lambda_{m+1}\right)r_m\psi_{1,0}(r_k,r_m)H_2^{(m)}\right\},$$

/6/

$$E^{(k)}(r)=\eta\left\{-(1/2\lambda(r))\psi_{1,0}(r_k,r)S(r_k-r)-\sum_{m=1}^{k-1}\left((\lambda_{m+1}-\lambda_m)/\lambda_{m+1}\right)\times\right.$$

$$\left.\times r_m\psi_{1,0}(r_k,r_m)E^{(m)}(r)\right\},$$

де

$$\psi_{1,0}(x,y)=I_1(\eta x)K_0(\eta y)+K_1(\eta x)I_0(\eta y).$$

Константи C_1 і C_2 визначаємо з граничних умов /2/:

$$C_i=(-1)^{i-1}BP_i/(A_1P_1-A_2P_2) \qquad (i=1,2), \qquad /7/$$

де

$$A_j=R_j-\sum_{k=1}^{n-1}\left((\lambda_{k+1}-\lambda_k)/\lambda_{k+1}\right)r_kF(r_n,r_k)H_j^{(k)} \quad (j=1,2);$$

$$B=(1/2\lambda(r))F(r_n,r)+\sum_{k=1}^{n-1}\left((\lambda_{k+1}-\lambda_k)/\lambda_{k+1}\right)r_kF(r_n,r_k)E^{(k)}(r);$$

$$F(x,y)=\lambda_n\eta\,\psi_{1,0}(x,y)+\alpha_n\psi_{0,0}(x,y);$$

$$R_1=\lambda_n\eta I_1(\eta r_n)+\alpha_nI_0(\eta r_n),\ R_2=-\lambda_n\eta K_1(\eta r_n)+\alpha_nK_0(\eta r_n);$$

$$P_1=-\lambda_1\eta K_1(\eta r_0)-\alpha_1K_0(\eta r_0),\ P_2=\lambda_1\eta I_1(\eta r_0)-\alpha_1I_0(\eta r_0).$$

У випадку суцільного циліндра

$$C_1=B/A_1, \quad C_2=0. \qquad /8/$$

Для кусково-однорідного по радіальній координаті простору у /7/, /8/ слід прийняти

$$A_1=1-\sum_{k=1}^{n-1}\left((\lambda_{k+1}-\lambda_k)/\lambda_{k+1}\right)r_kK_0(\eta r_k)H_1^{(k)}, \qquad /9/$$

$$A_2=-\sum_{k=1}^{n-1}\left((\lambda_{k+1}-\lambda_k)/\lambda_{k+1}\right)r_kK_0(\eta r_k)H_2^{(k)},$$

$$B=(1/2\lambda(r))K_0(\eta r)+\sum_{k=1}^{n-1}\left((\lambda_{k+1}-\lambda_k)/\lambda_{k+1}\right)r_kK_0(\eta r_k)E^{(k)}(r).$$

Перехід від трансформант до оригіналів здійснюємо за формулою

$$G=(2/\pi)\int_0^\infty \bar{G}\cos\eta\zeta\, d\eta. \qquad /10/$$

Функція $\bar{G}$ зручна для числових розрахунків при $\rho<z$, а при $\rho>z$ здійснити її числову реалізацію важко через наявність доданків, що поводять себе як $e^{\eta(\rho-z)}$. У цьому випадку слід скористатися симетричністю функції Гріна [1].

Наведені формули дають змогу розв"язувати стаціонарні осесиметричні задачі теплопровідності методом граничних елементів, не здійснюючи розбиття границі розділу шарів.

1. А р с е н и н В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М., 1984. 2. Б е н е р д ж и П., Б а т т е р ф и л д Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М., 1984. 3. Г а л и ц ы н А.С., Ж у к о в с к и й А.Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. К., 1976. 4. П р о ц ю к Б.В. Температурные поля и напряжения в многослойных цилиндрических телах: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1983.

Стаття надійшла до редколегії 23.02.87

УДК 517.53

М.Й.Гречанюк

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЛОГАРИФМІВ МАКСИМУМУ МОДУЛЯ І МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА ЦІЛОГО КРАТНОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ

Відомо *, що для цілої функції f, заданої абсолютно збіжним в $\mathbb{C}$ рядом Діріхле, вигляду

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n exp\{z\lambda_n\},\ 0=\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n\uparrow+\infty(n\to+\infty)$$

співвідношення

$$\ln M(x,f)=(1+o(1))\ln\mu(x,f) \qquad /1/$$

при $x\to+\infty$ зовні деякої множини скінченної міри виконується тоді і тільки тоді, коли $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n\lambda_n)<+\infty$,

де $M(x,f)=sup\{|f(x+iy)|:y\in\mathbb{R}\}$, $\mu(x,f)=max\{|a_n|exp\{x\lambda_n\}:n\geq 0\}$.

* С к о с к и в О.Б. О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию // Мат.заметки. 1985. Т.37. № 1. С. 41-47.

Вкажемо аналоги співвідношення /1/ для цілих функцій F, заданих абсолютно збіжними в $\mathbb{C}^2$ кратними рядами Діріхле вигляду

$$F(z_1,z_2)=\sum_{n,m=0}^{\infty} a_{n,m}\exp\{z_1\lambda_n^{(1)}+z_2\lambda_m^{(2)}\},\ 0=\lambda_0^{(j)}<\lambda_1^{(j)}<\ldots<\lambda_n^{(j)}\uparrow+\infty\ (n\to+\infty),\ j=1,2. \qquad /2/$$

Через S позначимо клас всіх рядів вигляду /2/. Нехай $M(x_1,x_2,F)=\sup\{|F(x_1+iy_1,x_2+iy_2)|:y_1,y_2\in\mathbb{R}\}$, $\mu(x_1,x_2,F)=\max\{|a_{n,m}|\times$ $\times\exp\{x_1\lambda_n^{(1)}+x_2\lambda_m^{(2)}\}:n,m\geqslant 0\}$, $\gamma_F(x_1,x_2)=\varliminf\limits_{t\to+\infty}(\ln\mu(tx_1,tx_2,F))/t$,

$$G_F=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:\ \gamma_F(x_1,x_2)=\infty\},$$

K – замикання довільного кута в $\mathbb{R}^2$ з вершиною в 0 таке, що $K\setminus\{0\}\subset G_F$, $mes\,E$ – міра Лебега вимірної множини $E\subset[0,+\infty)$, L – клас неперервних невід"ємних зростаючих до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функцій, (λ_k^*), $k\geqslant 0$, – послідовність чисел, що отримується з множини $\{\lambda_n^{(1)}+\lambda_m^{(2)}:n,m\geqslant 0\}$ впорядкуванням всіх її елементів у зростаючому порядку, C – клас множин E із $\mathbb{R}^2$ таких, що для кожної з них $mes(\mathbb{R}_+\setminus(E\cap\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:x_2=x_1+h;\ x_1,x_2\geqslant 0\}))<+\infty$ для всіх $h\in\mathbb{R}$.

<u>Теорема 1.</u> Для того щоб для кожної функції $F\in S$ виконувалось

$$\ln M(x_1,x_2,F)=(1+o(1))\ln\mu(x_1,x_2,F) \qquad /3/$$

при $|x|\to\infty$, $(x_1,x_2)\in K\cap E$, для довільного K такого, що $K\setminus\{0\}\subset G_F$, і для деякої множини $E\in C$, необхідно і достатньо

$$\sum_{k=1}^{\infty}1/(k\lambda_k^*)<+\infty.$$

Через C_0 позначимо клас множин E із $\mathbb{R}^2$ таких, що для кожної з них для всіх $h\in\mathbb{R}$ $\lim\limits_{|z|\to\infty}(mes(\mathbb{R}_+\setminus(E\cap Q_h)))/\min\{z_1,z_2\}=0$, де $Q_h=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:x_2=x_1+h,\ 0<x_1\leqslant z_1,\ 0<x_2\leqslant z_2\}$. Нехай $\psi\in L$. Скажемо, що $F\in S\psi$, коли $F\in S$ і існує $\zeta\in(0,+\infty)$ таке, що

$$|a_{n,m}|\leqslant\exp\{-(\lambda_n^{(1)}+\lambda_m^{(2)})\psi(\zeta(\lambda_n^{(1)}+\lambda_m^{(2)}))\}\quad(n+m\geqslant k_0).$$

<u>Теорема 2.</u> Нехай $\psi\in L$. Якщо для довільного $\eta\in(0,+\infty)$

$$\varlimsup_{R\to+\infty}\ (1/(\psi(\eta R)))\sum_{0<\lambda_k^*\leqslant R}1/(k\lambda_k^*)\geqslant 0,$$

то для кожної функції $F\in S(\psi)$ має місце /3/ при $|x|\to\infty$, $(x_1,x_2)\in K\cap E$ для довільного K такого, що $K\setminus\{0\}\subset G_F$ і для деякої множини $E\in C_0$.

Теорема 3. Нехай $\psi \in L$. Для довільних послідовностей $(\lambda_n^{(j)})$, $j=1,2$ таких, що

$$\overline{\lim_{R\to+\infty}} \, (1/(\psi(\eta R))) \sum_{0<\lambda_k^*<R} 1/(k\lambda_k^*) \geq b,$$

при деяких $\eta \in (0,+\infty)$ і $b \in (0,+\infty)$ і

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \, \frac{\ln k}{\lambda_k^* \sum\limits_{0<l<k}' 1/(l\lambda_l^*)} = 0 \qquad /4/$$

існує функція $F_1 \in S(\psi)$ і кут K, означений вище, всередині якого при $|x| \to \infty$ рівність /3/ не може виконуватися для жодної множини $E \in C_0$.

Зауваження. Теорема 3 залишиться справедливою, якщо в ній /4/ замінити на умову

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{\lambda_k^* \psi(\eta \lambda_k^*)} = 0.$$

Стаття надійшла до редколегії 09.03.87

УДК 517.537

О.Б.Скасків

ПРО НАЯВНІСТЬ ВИНЯТКОВИХ ЗНАЧЕНЬ У СПІВВІДНОШЕННІ ТИПУ БОРЕЛЯ ДЛЯ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Нехай $\Lambda = (\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$, $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow \infty$ $(1 \leq n \to \infty)$. Через $S(\Lambda)$ позначимо клас цілих функцій F, зображених абсолютно збіжними в $\mathbb{C}$ рядами Діріхле /клас цілих рядів Діріхле/ $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(z\lambda_n)$, а через S_Φ – клас цілих рядів Діріхле, для яких виконується умова $\ln M(x) \leq x\Phi(x)$ $(x_0 \leq x < \infty)$, де $M(x) = \sup\{|F(x+iy)| : |y| < \infty\}$, $\Phi(x)$ неперервна додатна зростаюча до $+\infty$ при $x \to +\infty$ функція.

Відомо [2], для того щоб для кожної функції $F \in S(\Lambda)$ виконувалось співвідношення

$$\ln M(x) = (1+o(1)) \ln \mu(x) \quad \left(\mu(x) \overset{def}{=} \max\{|a_n| \exp(x\lambda_n) : n \geq 0\}\right) \qquad /1/$$

при $x \to +\infty$ зовні деякої виняткової множини скінченної міри, необхідно і досить $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n\lambda_n) < \infty$.

У [3] показано, що для будь-якої функції $\Phi(x) \uparrow +\infty$ існує послідовність $\Lambda = (\lambda_n)$ така, що в класі $S(\Lambda) \cap S_\Phi$ співвідношення /I/ виконується при $x \to +\infty$, тобто виняткова множина відсутня. У зв"язку з цим виникає запитання: чи для будь-якого класу $S(\Lambda)$ у співвідношенні /I/ існують виняткові значення x. Відповідь дає така теорема.

Теорема. Для будь-якої послідовності $\Lambda=(\lambda_n), 0=\lambda_0<\lambda_n\uparrow\infty$ і для будь-якого $h>0$ існує $F\in S(\Lambda)$ така, що для деякої послідовності $x_n\to+\infty$ виконується нерівність $\ln M(x)>(h+1)\cdot$ $\cdot\ln\mu(x)\quad(x=x_n)$.

Доведення. Не зменшуючи загальності, вважаємо $\ln n=o(\lambda_n)$ $(n\to+\infty)$. Оберемо послідовність натуральних чисел (n_j) таку, що:

а/ $2\lambda_{n_j}<\lambda_{n_{j+1}}$; б/ $(1/\lambda_{n_j})\ln(n_{j+1}-n_j)\uparrow\infty (0<j\to+\infty)$; в/ $n_0=1$.

Приймемо $a_0=a_{n_0}=1, \ln a_{n_{j+1}}=\ln a_{n_j}-(1/h)((\lambda_{n_{j+1}}/\lambda_{n_j})-1)\ln(n_{j+1}-n_j), j\geqslant 0$, а для $n_j+1\leqslant n\leqslant n_{j+1}-1$ візьмемо $a_n=a_{n_j}\exp\{-(\lambda_n-\lambda_{n_j})x_j\}$, де $x_j=(1/(\lambda_{n_{j+1}}-\lambda_{n_j}))(\ln a_{n_j}-\ln a_{n_{j+1}})$. Розглянемо функцію $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\exp(z\lambda_n)$. Оскільки $(\ln a_{n_j}+\lambda_{n_j}x_j)\geqslant 0\ (j>0)$, то при $n_j\leqslant n\leqslant n_{j+1}-1$ маємо $-(1/\lambda_n)\ln a_n\geqslant-(1/\lambda_{n_j})\ln a_{n_j}$. Зауважимо, що внаслідок умов а, б вибору (n_j) $\lim_{j\to\infty}(-(1/\lambda_{n_j})\ln a_{n_j})=+\infty$, тому $\lim_{n\to+\infty}(-(1/\lambda_n)\ln a_n)=+\infty$. Отже, функція $F\in S(\Lambda)$ [I].

Елементарні міркування, які через громіздкість опускаємо, показують, що для $n_j\leqslant n\leqslant n_{j+1}-1$ $a_n\exp\{x_j\lambda_n\}=\mu(x_j)$; крім того, $\ln\mu(x_j)=\ln a_{n_j}+x_j\lambda_{n_j}\leqslant(1/h)\ln(n_{j+1}-n_j)$, тому

$$M(x_j)=F(x_j)\geqslant\sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1}a_n e^{x_j\lambda_n}=(n_{j+1}-n_j)\mu(x_j).$$

Звідси остаточно одержуємо

$$\ln M(x_j)\geqslant(1+h)\ln\mu(x_j)\ (j\geqslant 0).$$

1. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. М., 1976. 2. Скаскив О.Б. О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию // Мат. заметки. 1985. Т.37. № I. С. 41-47. 3. Шеремета М.Н. Усиление теоремы Бореля и его приложение // Теория функций, функциональный анализ и их приложение. 1985. Вып. 43. С. 132-136.

Стаття надійшла до редколегії 09.02.87

УДК 519.21

І.Д.Квіт, В.М.Косарчин

ВИПАДКОВИЙ ПРОЦЕС ЯК ЗГОРТКА АБО АМПЛІФІКАЦІЯ

Випадкова змінна ξ з функцією розподілу ймовірностей $F(x)$ має характер

$$C(s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\,dF(x), \quad -\infty < s < \infty . \qquad /1/$$

Тоді $C^2(s)$ є характером суми двох незалежних однаково розподілених випадкових змінних з функцією розподілу у вигляді згортки

$$F(x)\Big|_*^2 = F * F = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)\,dF(y). \qquad /2/$$

Якщо функція $C(s)$ не має нулів, то при довільному додатному t вираз

$$C^t(s) = e^{t \ln C(s)}, \qquad /3/$$

де $\ln C(s)$ – головне значення логарифму має сенс і є характером континуальної згортки порядку t, тобто випадкового процесу $F(x)\Big|_*^t$ з твірною функцією розподілу $F(x)$.

Зазначимо, що для абсолютно неперервної випадкової змінної ξ з густиною $p(x)=F'(x)$ відповідно маємо характер

$$C(s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} p(x)\,dx, \quad -\infty < s < \infty ,$$

згортку густин

$$p(x)\Big|_*^2 = \int_{-\infty}^{\infty} p(x-y)\,p(y)\,dy$$

та густину випадкового процесу $p(x)\Big|_*^t$ з твірною густиною $p(x)$ [1].

<u>Приклади.</u> Характер пуассонівської змінної

$$C(s)=e^{\lambda(e^{is}-1)}, \quad -\infty < s < \infty, \quad (\lambda > 0)$$

не має нулів. Отже,

$$C^t(s)=e^{\lambda t(e^{is}-1)}, \quad t>0$$

є характером випадкового процесу. За зворотною формулою

$$F(x)\Big|_*^t = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\left((\lambda t)^k/k!\right)E(x-k), \quad E(x-a)=\begin{cases} 0, & x<a \\ 1, & x>a \end{cases}. \qquad /4/$$

Розподіл /4/ пуассонівського процесу вперше одержано як розв"язок відповідної системи диференціальних рівнянь.

2. Характер нормальної змінної

$$C(s)=e^{ics+(1/2)Ds^2}, \quad -\infty<s<\infty, \ (-\infty<c<\infty, \ D>0)$$

не має нулів. Звідси

$$C^t(s)=e^{icts+(1/2)Dts^2}; \quad t>0$$

є характером випадкового процесу. За зворотною формулою

$$p(x)\Big|_*^t=\frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}}\,e^{-\frac{(x-ct)^2}{2Dt}}, \quad -\infty<x<\infty. \qquad /5/$$

Густину /5/ вперше одержано як розв"язок рівняння дифузії. Формула /5/ виражає густину ймовірності того, що в момент t частинка перебуватиме в пункті x, якщо в початковий момент $t=0$ вона починає дифундувати з початку координат $x=0$ вздовж осі абсцис з коефіцієнтом дифузії D і швидкістю течії C. У випадку дифузії без зносу $C=0$.

Нехай додатна випадкова змінна ξ з функцією розподілу ймовірностей $F(x)$ має відбиття

$$M(z)=\int_0^\infty x^{z-1}dF(x), \ 1-\alpha<Re\,z<1+\beta, \ (\alpha>0, \beta>0). \qquad /6/$$

Тоді $M^2(z)$ є відбиттям добутку двох незалежних однаково розподілених випадкових змінних з функцією розподілу у вигляді амліфікації

$$F(x)\Big|_\boxdot^2=F\boxdot F=\int_0^\infty F(x/y)\,dF(y). \qquad /7/$$

Якщо функція $M(z)$ не має нулів, то при довільному додатному t вираз

$$M^t(z)=e^{t\ln M(z)}, \qquad /8/$$

де $M(z)$ – головне значення логарифму, має сенс і є відбиттям континуальної амліфікації порядку t, тобто випадкового процесу $F(x)\Big|_\boxdot^t$ з твірною функцією розподілу $F(x)$.

Зауважимо, що для абсолютно неперервної додатної випадкової змінної ξ з густиною $p(x)=F'(x)$ відповідно маємо відбиття

$$M(z)=\int_0^\infty x^{z-1}p(x)dx, \ 1-\alpha<Re\,z<1+\beta, \ (\alpha>0, \ \beta>0),$$

амліфікацію густин

$$p(x)\Big|_\boxdot^2=\int_0^\infty p(x/y)\,p(y)(dy/y)$$

і густину випадкового процесу $p(x)\Big|_\boxdot^t$ з твірною густиною $p(x)$, [2].

Приклади. 1. Відбиття

$$M(z)=\frac{\nu}{z+\nu-1}\ , \quad 1-\nu<Re\,z$$

мономної змінної з густиною

$$p(x)=\nu x^{\nu-1}; \quad 0<x<1, \ (\nu>0)$$

не має нулів. Отже,

$$M^t(z)=\left(\frac{\nu}{z+\nu-1}\right)^t, \quad t>0$$

є відбиттям випадкового процесу. За зворотною формулою

$$p(x)\Big|_{\text{в}}^{t}=(\nu^t/\Gamma(t))x^{\nu-1}(\ln(1/x))^{t-1}, \quad 0<x<1, \ (t>0, \ \nu>0). \qquad /9/$$

Процес з густиною /9/ є континуальною ампліфікацією порядку t з мономною твірною густиною.

2. Відбиття

$$M(z)=e^{c(z-1)+(1/2)D(z-1)^2}, \quad -\infty<Re\,z$$

логнормальної змінної з густиною

$$p(x)=\frac{1}{x\sqrt{2\pi D}}\ e^{-\frac{(\ln x-c)^2}{2D}}, \ x>0, \qquad (-\infty<c<\infty, \ D>0)$$

не має нулів. Звідси

$$M^t(z)=e^{ct(z-1)+(1/2)Dt(z-1)^2}, \quad t>0$$

є відбиттям випадкового процесу. За зворотною формулою

$$p(x)\Big|_{\text{в}}^{t}=\frac{1}{x\sqrt{2\pi Dt}}\ e^{-\frac{(\ln x-ct)^2}{2Dt}}, \ x>0, (t>0, -\infty<c<\infty, \ D>0). \ /10/$$

Процес з густиною /10/ є континуальною ампліфікацією порядку t з логнормальною твірною густиною.

3. Нехай параметр t у густині випадкового процесу $p(x)\Big|_{*}^{t}$ та $D(x)\Big|_{\text{в}}^{t}$ – це значення додатної випадкової змінної τ з густиною $h(t)$. Тоді за формулою повної ймовірності випадкова континуальна згортка

$$p(x)\Big|_{*}^{\tau}=\int_0^\infty h(t)\,p(x)\Big|_{*}^{t}dt \qquad /11/$$

і випадкова континуальна ампліфікація

$$p(x)\Big|_{\text{в}}^{\tau}=\int_0^\infty h(t)\,p(x)\Big|_{\text{в}}^{t}dt \qquad /12/$$

представляють густину випадкового процесу з твірною густиною $p(x)$ і керуючою густиною $h(t)$.

Приклади. 1. Процес дифузії без зносу з перехідною густиною /5/ при $C = 0$, керований стійким процесом з показником $1/2$, за формулою /11/ є процесом Коші з перехідною густиною

$$\int_0^{\infty} \frac{\theta}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{\theta^2}{2t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{2Dt}} dt = \frac{\theta D}{\pi(\theta^2 D + x^2)}, \quad \theta > 0. \qquad /13/$$

2. Випадковий процес з перехідною густиною /10/ при $C = 0$, керований стійким процесом з показником $1/2$, за формулою /12/ є процесом логарифмічно Коші з перехідною густиною

$$\int_0^{\infty} \frac{\theta}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{\theta^2}{2t}} \frac{1}{x\sqrt{2\pi Dt}} e^{-\frac{\ln^2 x}{2Dt}} dt = \frac{\theta\sqrt{D}}{\pi x(\theta^2 D + \ln^2 x)}, \quad \theta > 0. \qquad /14/$$

Таким чином, випадкова континуальна згортка /11/ і випадкова континуальна ампліфікація /12/ дають змогу будувати нові стохастичні процеси, вказавши твірний і керуючий.

1. К в і т І.Д. Випадкова континуальна згортка // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1973. Вип.8. С.20-29. 2. К в і т І.Д., К о с а р ч и н В.М. Випадкова континуальна ампліфікація // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1987. Вип.28. С.75-79.

Стаття надійшла до редколегії 29.06.87

УДК 536.12

Б.В.Ковальчук

ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ ОХОЛОДЖУЮЧОЇ ПЛАСТИНКИ З ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Розглянемо пластинку товщиною 2δ, яка містить чужорідне включення такої самої товщини і ширини $2h \leqslant 2\delta$. Система охолоджується від температури t_H до температури t_0.

Теплофізичні характеристики системи як єдиного цілого подаємо у вигляді

$$P(x) = P_1 + (P_0 - P_1) N(x), \qquad /1/$$

де P_1, P_0 – теплофізичні характеристики основного матеріалу і включення;

$$N(x) = S_-(x+h) - S_+(x-h);$$

$$S_\pm(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0, \\ 0{,}5 \pm 0{,}5, & \zeta = 0, \\ 0, & \zeta < 0. \end{cases}$$

Оскільки включення тонке, то [2]

$$\lim_{h \to 0} (N(x)/2h) = \delta(x), \qquad /2/$$

де $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака.

З огляду на /2/ при $h \to 0$ коефіцієнти теплопровідності, тепловіддачі з поверхонь $z = \pm\delta$ і об"ємної теплоємності записуємо у вигляді

$$\lambda(x) = \lambda_1 + \Lambda_0(1 - K_\lambda)\delta(x),$$
$$\alpha(x) = \alpha_1 + A_0(1 - K_\alpha)\delta(x), \qquad /3/$$
$$C_v(x) = C_{v1} + R_0(C_0 - K_s C_1)\delta(x),$$

де введені позначення $\Lambda_0 = 2\lambda_0 h$, $A_0 = 2\alpha_0 h$, $R_0 = 2S_0 h$, $K_p = p_1/p_0$.

Підставляючи /3/ у рівняння теплопровідності неоднорідного тіла [1]

$$(\partial/\partial x)[\lambda(x)(\partial T/\partial x) - (\alpha(x)/\delta)T = C_v(x)\dot{T}, \qquad /4/$$

одержуємо диференціальне рівняння з сингулярними коефіцієнтами

$$(\partial^2 T/\partial x^2) + L(\partial T/\partial x)_* \delta'(x) - \varkappa_1^2 T - MT_* \delta(x) = (\dot{T}/a_1) + F\dot{T}_* \delta(x), \qquad /5/$$

де

$$L = (\Lambda_0/\lambda_1)(1 - K_\lambda), \quad M = (A_0/\delta\lambda_1)(1 - K_\alpha), \quad F = (R_0/\lambda_1)(C_0 - K_s C_1),$$

$$\varkappa_1^2 = (\alpha_1/\lambda_1\delta), \quad a_1 = \lambda_1/C_{v1}, \quad \delta'(x) = (d\delta(x))/dx, \quad \dot{T} = \partial T/\partial\tau,$$

$$T_* = (1/2)\left(T|_{x=0^+} + T|_{x=0^-}\right).$$

Застосуємо до /5/ перетворення Лапласа по τ. У результаті дістаємо

$$\bar{T}'' + L\bar{T}'_* \delta'(x) - \gamma_1^2 \bar{T} = [(M + Fs)\bar{T}_* - Ft_H]\delta(x) - (t_H/a_1). \qquad /6/$$

Загальний розв"язок /6/ має вигляд

$$\bar{T} = -[(M + Fs)\bar{T}_* - Ft_H](e^{-\gamma_1|x|}/2\gamma_1) - L\bar{T}'_*(e^{-\gamma_1|x|}/2)\operatorname{sign} x + \qquad /7/$$
$$+ (t_H/a_1\gamma_1^2),$$

де

$$\gamma_1 = \sqrt{(s/a_1) + \varkappa_1^2}.$$

Після диференціювання /7/ по x знаходимо значення $\bar{T}_*$ і $\bar{T}'_*$. Тоді розв"язок /7/ записуємо у вигляді

$$\bar{T}=\frac{t_H}{a_1\gamma_1^2}\left(1+\frac{Fa_1\varkappa_1^2-M}{2\gamma_1^2+Fs+M}e^{-|x|\gamma_1}\right)\frac{t_H}{a_1}\left\{\gamma_1^{-2}+(Fa_1\varkappa_1^2-M)e^{-|x|\gamma_1}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{\gamma_1^2(Fs+M)}+\frac{4}{F^3\psi(s)}-\frac{2}{F^2\gamma_1\lambda(s)}\right]\right\}, \qquad /8/$$

де

$$\psi(s)=(s-s_3)\chi(s);\ \ \chi(s)=(s-s_1)(s-s_2);\ \ s_3=-(M/F);$$

$$s_{1,2}=((2/a_1F)-M)(1/F)\pm(2/a_1F^2)\sqrt{1-Fa_1(M-Fa_1\varkappa_1^2)}.$$

Переходячи тепер у /8/ від зображень до оригіналів, одержуємо

$$T=t_H\left\{e^{-Mi_1}erf(|x|/2\sqrt{a_1\tau})+\psi^+(|x|,\tau,s_3,w_3)+(4/F^2)w_3^2\times\right.$$

$$\left.\times\left[\sum_{i=1}^{3}\frac{\psi^+(|x|,\tau,s_i,w_i)}{\psi_s'(s_i)}-\frac{F}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\psi^-(|x|,\tau,s_i,w_i)}{w_i\chi_s'(s_i)}\right]\right\}, \qquad /9/$$

де

$$\psi^{\pm}(|x|,\tau,s_i,w_i)=(e^{s_i\tau}/2)[e^{-|x|w_i}erfc((|x|/2\sqrt{a_1\tau})-\sqrt{a_1\tau}\,w_i)\pm$$

$$\pm e^{|x|w_i}erfc((|x|/2\sqrt{a_1\tau})+\sqrt{a_1\tau}\,w_i)],\ w_i=\sqrt{\varkappa_1^2+(s_i/a_1)},\ Mi_1=(\alpha_1/C_{v1}\delta);$$

$erfc\,z=1-erf\,z$; $erf\,z$ – інтеграл ймовірності.

У безрозмірних величинах і параметрах розв"язок /9/ має вигляд

$$\theta=e^{-Mi_1}erf(|X|/2\sqrt{F_0})+\psi^+(|X|,F_0,S_3,\Omega_3)+(4/f^2)\Omega_3^2\times$$

$$\left[\sum_{i=1}^{3}\frac{\psi^+(|X|,F_0,S_i,\Omega_i)}{\psi_S'(S_i)}-\frac{f}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\psi^-(|X|,F_0,S_i,\Omega_i)}{\Omega_i\chi_S'(S_i)}\right], \qquad /10/$$

де

$$X=x/\delta;\ \ F_0=(a_1\tau/\delta^2);\ \ \Omega_i=\sqrt{Bi_1+S_i};$$

$$Bi_1=(\alpha_1\delta/\lambda_1);\ \ S_i=s_i(\delta^2/a_1);\ \ S_3=-(m/f);$$

$$S_{1,2}=((2/f)-m)(1/f)\pm(2/f^2)\sqrt{1-f(m-fBi_1)};$$

$$f=Fa_1/\delta=(2\beta/K_S)(K_C^{-1}-K_S)=2\beta((1/K_{cv})-1);\ \ K_{cv}=C_{v1}/C_{v0};$$

$$m=M\delta=((2Bi_0\beta)/K_\lambda)(1-K_\alpha);\ \beta=h/\delta;\ \ Bi_0=(\alpha_0\delta/\lambda_0);$$

$$\psi^{\pm}(|X|,F_0,S_i,\Omega_i)=(e^{S_iF_0}/2)[e^{-|X|\Omega_i}erfc((|X|/2\sqrt{F_0})-\Omega_i\sqrt{F_0})\pm$$

$$\pm e^{|X|\Omega_i}erfc((|X|/2\sqrt{F_0})+\Omega_i\sqrt{F_0})].$$

При $F_0=0, X=0$ маємо $\theta=1$. А при $F_0>0$, $X=0$ одержуємо

$$\theta=\frac{4}{f^2}\Omega_3^2\left[\frac{e^{S_1F_0}}{(S_1-S_2)(S_1-S_3)}-\frac{e^{S_2F_0}}{(S_1-S_2)(S_2-S_3)}+\frac{e^{S_3F_0}}{(S_1-S_3)(S_2-S_3)}\right]-$$
$$-\frac{fe^{S_1F_0}}{2\Omega_1(S_1-S_2)}\,erf(\Omega_1\sqrt{F_0})+\frac{fe^{S_2F_0}}{2\Omega_2(S_1-S_2)}\,erf(\Omega_2\sqrt{F_0}). \qquad /11/$$

1. К о л я н о Ю.М., К у л и к А.Н. Температурные напряжения от объемных источников. К., 1983. 2. К о р н Г., К о р н Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1968.

Стаття надійшла до редколегії 23.03.87

УДК 517.514

Л.М. Лісевич

ДЕЯКІ УЗАГАЛЬНЕННЯ ЛЕМИ ДЕМИДОВИЧА

Лема Демидовича [1]. Якщо функція $\varphi(x)$ неперервна та обмежена на $[x_0,+\infty[$ /або на $]-\infty, x_0]$ /, то, яке б не було число τ, можна вказати послідовність $x_n(\tau)\to+\infty$ /або $x_n(\tau)\to-\infty$/ таку, коли

$$\lim_{n\to\infty}(\varphi(x_n+\tau)-\varphi(x_n))=0. \qquad /1/$$

Розглянемо деякі наслідки, які випливають з цієї леми.

Наслідок 1. Якщо функція $\varphi(x,y)$ неперервна й обмежена на $[x_0,+\infty[$ /або $]-\infty, x_0]$ /, визначена та неперервна для всіх $y\in Y$ рівномірно відносно x, то, яке б не було число τ, можна вказати послідовність $x_n(\tau)\to+\infty$ /або $x_n(\tau)\to-\infty$/, коли

$$\lim_{n\to\infty}(\varphi(x_n+\tau,y)-\varphi(x_n,y))=0 \qquad /2/$$

рівномірно відносно $y\in Y$.

Доведення наслідку випливає безпосередньо з нерівності

$$|\varphi(x_n+\tau,y)-\varphi(x_n,y)|\leqslant|\varphi(x_n,y)-\varphi(x_n,y_0)|+|\varphi(x_n+\tau,y)-$$
$$-\varphi(x_n+\tau,y_0)|+|\varphi(x_n+\tau,y_0)-\varphi(x_n,y_0)|,$$

де $y_0\in Y$.

Наслідок 2. Якщо функція $f(x,y)$ по кожній змінній x,y задовольняє умови наслідку 1, то, яке б не було число τ, знайдуться дві послідовності $x_n(\tau) \to +\infty$ і $y_n(\tau) \to +\infty$, коли

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x_n+\tau, y_n+\tau)-f(x_n,y_n)\right)=0.$$

Доведення наслідку 2 випливає з нерівності

$$|f(x_n+\tau,\, y_n+\tau)-f(x_n,y_n)| \leqslant |f(x_n+\tau, y_n+\tau)-f(x_n, y_n+\tau)| + $$
$$+\,|f(x_n,\, y_n+\tau)-f(x_n,y_n)|.$$

Приклад.

$$f(x\ ,y)=\sin x+\cos y;\quad \tau=\pi;\ x_n=n\pi;\ y_n=((2n+1)/2)\pi.$$

Наслідок 3. Нехай $\{\varphi_k(x)\}$, $k=1,2,\dots,m$ – система рівномірно обмежених і рівностепенно неперервних на $[x_0,+\infty[$, /або на $]-\infty, x_0]$ / функцій. Тоді, яке б не було число τ, можна вказати систему послідовностей $\{x_n^{(k)}(\tau)\} \to +\infty$ / або $\{x_n^{(k)}(\tau)\} \to -\infty$ /, $k=\overline{1,m}$, коли

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\left(\varphi_k(x_n^{(k)}+\tau)-\varphi_k(x_n^{(k)})\right)=0. \qquad /3/$$

Доведення наслідку 3 безпосередньо випливає з леми Демидовича.

Узагальнимо тепер лему Демидовича на випадок функцій з простору S^p /простору Степанова/, що є сукупністю сумовних разом з p-м степенем $(p \geqslant 1)$ у кожному скінченному інтервалі функцій, пов"язаних метрикою

$$D_{S^p}\{f(x),g(x)\}=\sup_{-\infty<x<+\infty}\left\{\int_x^{x+1}|f(t)-g(t)|^p dt\right\}^{1/p}.$$

Теорема. Якщо дійсна функція $f(x)$ S^p – обмежена та S^p – неперервна на $[x_0,+\infty[$, то, які не були б числа τ і $h>0$, можна вказати послідовність $x_n(\tau) \to +\infty$, коли $x_n > X > x_0$

$$\sup_{x_n>X}\left|\int_{x_n}^{x_n+1}(f(t+\tau)-f(t))dt\right|<h. \qquad /4/$$

Доведення. Припустимо, що теорема неправильна. Тоді знайдуться такі числа τ_0 і h_0, коли для $x_n>X>x_0$, $(h_0>0)$

$$\left|\int_{x_n}^{x_n+1}(f(t+\tau_0)-f(t))dt\right| \geqslant h_0. \qquad /5/$$

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що

$$\int_{x_n}^{x_n+1}(f(t+\tau_0)-f(t))dt \geqslant h_0 \qquad /6/$$

або

$$\int_{x_n}^{x_n+1}(f(t+\tau_0)-f(t))dt \leqslant -h_0. \qquad /7/$$

Нехай має місце нерівність /6/. Тоді для $x>X$ і $n>N$

$$\int_x^{x+1}(f(t+n\tau_0)-f(t))dt=\int_x^{x+1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}[f(t+(k+1)\tau_0)-f(t+k\tau_0)]\right\}\times$$

$$\times dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x+k\tau_0}^{x+k\tau_0+1}[f(t+\tau_0)-f(t)]dt. \qquad /8/$$

Прийнявши тепер $x_k=x+k\tau_0$, $k=0,1,\dots,n-1$, на основі /6/ з /8/ отримуємо

$$\int_x^{x+1}[f(t+n\tau_0)-f(t)]dt \geqslant nh_0. \qquad /9/$$

Далі, застосовуючи в /9/ нерівності Гальдера та Мінковського, маємо

$$nh_0\leqslant\left(\int_x^{x+1}|f(t+n\tau_0)-f(t)|^p dt\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_x^{x+1}|f(t+n\tau_0)|^p dt\right)^{1/p}+\left(\int_x^{x+1}|f(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

Оскільки $h_0>0$ і $n>N$, то остання нерівність суперечить тому, що $f(x)$ S^p – обмежена. Отримана суперечність доводить теорему.

<u>Наслідок 4.</u> Якщо функція $f(x,y)$ S^p – обмежена та S^p – неперервна на $[x_0,+\infty[$ по x рівномірно відносно $y\in Y$, а також неперервна по $y\in Y$, то, які б не були числа τ і $h>0$, можна вказати послідовність $x_n(\tau)\longrightarrow+\infty$, коли для $x_n>X>x_0$

$$\sup_{x_n>X}\left|\int_{x_n}^{x_n+1}[f(t+\tau,y)-f(t,y)]dt\right|<h$$

рівномірно відносно $y\in Y$.

<u>Наслідок 5.</u> Якщо система дійсних функцій $\{\varphi_k(x)\}$, $k=1,2,\dots,m$ рівномірно S^p – обмежена та рівностепенево S^p–неперервна на $[x_0,+\infty[$, то, які б не були числа τ і $h>0$, можна вказати таку систему послідовностей $\{x_n^{(k)}(\tau)\}$, $k=1,2,\dots,m$, коли для $x_n^{(k)}>X\geqslant x_0$

$$\sup_{x_n^{(k)}>X}\sum_{k=1}^{m}\left|\int_{x_n^{(k)}}^{x_n^{(k)}+1}[\varphi_k(t+\tau)-\varphi_k(t)]dt\right|<h.$$

Зауваження. Доведена теорема та її наслідки 4, 5 правильні й для випадку проміжка $]-\infty, x_0]$.

1. Демидович Б.П. Почти периодичность решения обыкновенного дифференциального уравнения // Успехи мат. наук. 1953. Т.8. Вып. 6. 58. С. 103-106. 2. Ковалько О.С., Лісевич Л.М. Деякі граничні співвідношення для S^p - обмежених функцій // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1969. Вып. 4. С.25-28.

Стаття надійшла до редколегії 20.04.87

УДК 517.944:947

Марія Д. Мартиненко

ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНО СПАДНІ РОЗВ"ЯЗКИ ОДНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Визначення втрат частинок у прискорювачах пов"язано з розв"язком такого лінійного параболічного рівняння другого порядку [1]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (1+x)\frac{\partial W}{\partial x} + W. \qquad /1/$$

Для розробки чисельних алгоритмів розв"язування /1/ важливе значення мають явні аналітичні розв"язки. Наведемо такі розв"язки, що зображаються у вигляді інтегралів від елементарних функцій і експоненціально спадають при $t \to +\infty$.

Розв"язки /1/ шукаємо у вигляді

$$W(x,t) = u(x)e^{-\lambda t}, \qquad /2/$$

де $\lambda > 0$ - стала; $u(x)$ - невідома обмежена функція. Підставляючи /2/ в /1/, дістаємо для її визначення таке рівняння:

$$lu \equiv x\frac{d^2u}{dx^2} + (1+x)\frac{du}{dx} + (1+\lambda)u = 0. \qquad /3/$$

Розв"язок /3/ шукаємо у вигляді інтегралу

$$u(x) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-x\tau} y(\tau)\, d\tau, \qquad /4/$$

де α, β - сталі, а $y(\tau)$ - невідома функція, які визначимо далі. Підставляючи /4/ у /3/, після нескладних перетворень запишемо

$$Lu(x) \equiv -\left[(\tau^2-\tau)y(\tau)e^{-x\tau}\right]_{\tau=\alpha}^{\tau=\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} e^{-x\tau}\Big\{\frac{d}{d\tau}\left[(\tau^2-\tau)y(\tau)\right] - \left[\tau-(1+\lambda)\right]y(\tau)\Big\}\, d\tau = 0. \qquad /5/$$

З /5/ випливає, що /4/ даватиме розв"язок /3/, коли

$$\left[(\tau^2-\tau)y(\tau)e^{-x\tau}\right]_{\tau=\alpha}^{\tau=\beta}=0, \qquad /6/$$

$$\frac{d}{d\tau}\left[(\tau^2-\tau)y(\tau)\right]-\left[\tau-(1+\lambda)\right]y(\tau)=0. \qquad /7/$$

З /7/ маємо

$$y(\tau)=C\,\frac{|\tau-1|^{1+\lambda}}{\tau^{\lambda}}. \qquad /8/$$

Рівняння /6/ перетворюється в тотожність при $\alpha=0, \beta=1$ або $\alpha=1$, $\beta=\infty$ /при $x\tau>0$ / і т.д. Отже, шуканий розв"язок /1/ при $\alpha=0$, $\beta=1$ матиме вигляд

$$W(x,t)=Ce^{-\lambda t}\int_0^1 e^{-x\tau}\left((1-\tau)/\tau^{\lambda}\right)dt. \qquad /9/$$

Наявний у /9/ інтеграл в елементарних функціях не зображується. Зобразимо його через функцію Куммера [2] $M(a,c,x)={}_1F_1(a,c,x)$ /де ${}_1F_1(a,c,x)$ – вироджена гіпергеометрична функція/, а /9/ запишемо у такому вигляді:

$$W(x,t)=C\,\frac{\lambda(1+\lambda)\pi}{\sin\lambda\pi}\,e^{-\lambda t}M(1-\lambda;3,-x). \qquad /10/$$

Формула /9/ показує, що експоненціальні розв"язки /1/, зображені у вигляді /2/, існують тільки при $0<\lambda<1$. Сталу C можна визначити з такої умови: якщо $x\in[a,b]$, $t\in[0,T]$ і $W_0=const$, то

$$W_0=\int_a^b\int_0^T\left[W(x,t)\right]^2dx\,dt.$$

Із зробленого аналізу випливає, що при $x>0$ розв"язками /1/ є також і функції

$$W(x,t)=Ce^{-\lambda t}\int_0^{\infty}e^{-x\tau}\left(|\tau-1|^{1+\lambda}/t^{\lambda}\right)d\tau=Ce^{-\lambda t}\Big[\int_0^1 e^{-x\tau}\left((1-\tau)/\tau^{\lambda}\right)d\tau+$$

$$+\int_1^{\infty}e^{-x\tau}\left((\tau-1)^{1+\lambda}/\tau^{\lambda}\right)d\tau\Big],$$

$$W(x,t)=Ce^{-\lambda t}\int_1^{\infty}e^{-x\tau}\left((\tau-1)^{1+\lambda}/\tau^{\lambda}\right)d\tau. \qquad /12/$$

Для збіжності інтегралу в /11/ слід припустити, що $x>0$, $0<\lambda<1$. Водночас це обмеження не істотне для розв"язку, зображуваного формулою /12/; тоді слід вважати $\lambda>0$.

На закінчення відзначимо, що виражаючи інтеграли /9/, /11/ і /12/ через спеціальні функції, можна отримати експоненціально спадні розв"язки /1/ і при значеннях λ, відмінних від вказаних вище.

1. Каган Б.М., Тер-Микаэлян Т.М. Решение интегральных задач на ЦВМ. М., 1964. 2. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., 1981.

Стаття надійшла до редколегії 17.09.84

УДК 512.546

І.Й.Гуран

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ АРХАНГЕЛЬСЬКОГО

Нехай T - нескінчена множина, $X(T)$ - група всіх бієкцій множини T на себе. Групу $X(T)$ розглядатимемо як топологічну в топології поточкової збіжності. Наведемо деякі властивості топологічної групи $X(T)$:

а/ $X(T)$ - тотально мінімальна, повна в розумінні Райкова топологічна група [2];

б/ $X(T)$ - немає групового поповнення.

Твердження. $X(T)$ - топологічно проста топологічна група.

Доведення. Нехай N - не тривіальна замкнена підгрупа в групі $X(T)$. Підгрупа $SX(T)=\{f\in X(T): \operatorname{supp} f<\omega\}$ - всюди щільна в групі $X(T)$ і мінімальна [2]. З критерію Стефенсона - Банашевського випливає, що $N\cap SX(T)\neq\{e\}$. Отже, група N містить елемент, відмінний від тотожного, який рухає лише скінченне число елементів множини T, а тому $N\supseteq S(T)$.

Теорема 1. Нехай топологічна група володіє підгруповою базою околів нейтрального елемента. Тоді вона топологічно ізоморфна деякій підгрупі групи $X(T)$.

З твердження теореми і властивості а/ випливає, що довільна топологічна група, яка володіє підгруповою базою околів одиниці, вкладається в тотально мінімальну топологічну групу. Цей факт узагальнює теорему Дієрольф та Шваненгеля [3]. Як частковий випадок отримуємо: добуток дискретних груп, наприклад $\mathbb{Z}^{\omega_1}$, вкладається в групу $X(\omega_1)$.

А.В.Архангельський сформулював таку [1] задачу. Чи кожна топологічна група може бути вкладена в добуток секвенціальних груп?

Теорема 2. Для кожного кардинала $\tau > \omega$ група $X(\tau^+)$ не вкладається в добуток груп тісноти, що не перевищує τ.

Доведення. Припустимо, що $X(\tau^+) \subset \Pi G_\alpha$, $t(G_\alpha) \leq \tau$. Розглянемо ядро нетривіальної проекції $\pi_\alpha : X(\tau^+) \to G_\alpha$. Це замкнена нормальна підгрупа групи $X(T)$. Але група $X(T)$ - топологічно проста, тому π_α - ізоморфне ущільнення групи $X(\tau^+)$ в G_α. З мінімальності групи $X(\tau^+)$ випливає, що π_α - вкладення. Однак $t(X(\tau^+)) \geq t(Z^{\tau^+}) = \tau^+ > \tau$. З отриманого протиріччя одержуємо твердження теореми.

Отже, відповідь на питання А.В.Архангельського негативна.

1. Архангельский А.В. Классы топологических групп // Успехи мат. наук. 1981. Т.36. Вып. 3. С. 127-146.
2. Dierolf S., Schwanengel U. Un example d'un groupe topologique q-minimal mais non précompact // Bull. Sc. math. 1977. Vol. 101. p.265-269. 3. Dierolf S., Schwanengel U. Examples of locally compact non-compact minimal topological groups // Pacif. J. Math. 1979. Vol.82. N2. p.349-355.

Стаття надійшла до редколегії 15.04.87

УДК 517.947

О.Л.Горбачук

ПРО ПОВЕДІНКУ РОЗВ"ЯЗКІВ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ З САМОСПРЯЖЕНИМ ОПЕРАТОРОМ

Відомо [2], що задача Коші для рівняння $(dy(t))/(dt) = Ay(t)$, $t \in [0, \infty)$, $y(0) = y_0$, A - обмежений оператор в банаховому просторі має розв"язок при довільному y_0 з банахового простору. Причому розв"язок рівняння $y(t) = e^{At} y_0$ - ціла функція, тобто такий розв"язок продовжується до аналітичної функції, заданої на всій комплексній площині. Розглянемо еволюційне рівняння з самоспряженим оператором і встановимо, що довільний розв"язок такого рівняння продовжується до аналітичної функції, заданої у відкритій правій півплощині.

Вектор y із банахового простору називається аналітичним /цілим/ вектором оператора A, якщо $y \in D(A^n)$ $(D(A^n))$ -

область визначення оператора A^n) і ряд

$$\|y\|+(\|Ay\|/1!)t+(\|A^2y\|/2!)t^2+\dots+(\|A^ny\|/n!)t^n+\dots$$

збігається при деякому $t>0$ /довільних t /.

Лема. Розв"язок рівняння $(dy(t))/(dt)=Ay(t),\ t\in[0,\infty)$, де A – додатний самоспряжений оператор у гільбертовому просторі продовжується до цілої функції.

Доведення. Згідно з представленням [1] розв"язок такого рівняння $y(t)e^{At}y_0$, де $y_0=y(0)$ – цілий вектор оператора A. Із означення цілого вектора випливає, що розв"язок $y(t)$ – ціла функція.

Теорема. Розв"язок рівняння $(dy/dt)=Ay(t),\ t\in[0,\infty)$, де A – самоспряжений оператор продовжується до аналітичної функції, визначеної у відкритій правій площині.

Доведення. Нехай $A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE_\lambda$ – спектральний розклад самоспряженого оператора. Приймемо $A_+=\int_0^{\infty}\lambda dE_\lambda$ і $A_-=\int_{-\infty}^{0}\lambda dE_\lambda$. Розглянемо два ортогональні проектори

$$P_+=\int_0^{\infty}dE_\lambda=E-E_0,\quad P_-=\int_{-\infty}^{0}dE_\lambda=E_0.$$

Гільбертовий простір H, в якому задано оператор A, розбивається в ортогональну суму підпросторів $H_+=P_+H$ і $H_-=P_-H$. Позначимо через $x_+=P_+x$ і $x_-=P_-x$. На H_+ оператор A збігається з A_+, а на H_- з A_-. Оператор A_+ на H_+ додатний, а на H_- нульовий. Відповідно оператор A_- на H_+ нульовий, а на H_- - від"ємний.

Рівняння $(dy(t))/(dt)=Ay(t)$ розпадається на два диференціальні рівняння

$$(dy_+(t))/(dt)=A_+y_+(t) \qquad /1/$$

у просторі H_+,

$$(dy_-(t))/(dt)=A_-y_-(t) \qquad /2/$$

у просторі H_-

$$y(t)=y_+(t)+y_-(t).$$

Неважко перевірити, що множина цілих і аналітичних векторів операторів A і A_+ – відповідно збігаються. Оскільки оператор A_+ – додатний самоспряжений, то за лемою функція $y_+(t)$ продовжується до цілої.

Розв"язок рівняння /2/ $y_-(t)=e^{A_-t}z_0$, де z_0 - аналітичний вектор /цей розв"язок аналітичний на півосі $(0, \infty)$. На від"ємну піввісь розв"язок взагалі не продовжується /приклад такого розв"язку можна побудувати/, згідно з представленням функція $y_-(t)$ аналітична у відкритій правій площині. Оскільки розв"язок $y(t)=y_+(t)+y_-(t)$, то теорема доведена.

1. Горбачук Е.Л. Представление решений эволюционных уравнений // IX школа по теории операторов в функциональных пространствах. Тернополь. 1984. 2. Данфорд Н., Шварц Д. Линейные операторы, общая теория. М., 1962.

Стаття надійшла до редколегії 15.04.87

З М І С Т

УДК 517.954

Существование решения задачи Коши для уравнения типа поперечных колебаний стержня с вырождением. Л а в р е н ю к С.П. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. – 1988. – Вып. 30: Прикладные вопросы математического анализа. – С. 3–5 . – На укр. яз.

Доказано существование и единственность решения почти всюду задачи Коши для уравнения

$$p(x,t)u_{tt}+(a_0(x,t)u_{xx})+a_1(x,t)u_{xx}+a_2(x,t)u_{xt}+a_3(x,t)u_x+ \\ +a_4(x,t)u_t+a_5(x,t)u=f(x,t)$$

в случае, когда $p(x,t)$ может обращаться в нуль при $t=0$. Библиогр.: 2 назв.

УДК 681.51

Об одной задаче моделирования динамики биопопуляций. К и р и л и ч В.М. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. – 1988. – Вып. 30: Прикладные вопросы математического анализа. – С. 5–7. На укр. яз.

Предлагается метод решения одной нелокальной задачи для гиперболического уравнения первого порядка, которая возникает при изучении динамики биопопуляций. Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.956

Приближенное решение смешанной задачи для двумерной параболической системы уравнений. К о с т е н к о В.Г., Г у б а л ь Л.Е. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. – 1988. – Вып. 30: Прикладные вопросы математического анализа. – С. 8–13 .– На укр. яз.

При определенных условиях найдено приближенное решение двумерной смешанной задачи для параболической системы линейных уравнений с помощью методов конечных интегральных преобразований, прямых и построения матрицы Грина в явном виде.

УДК 517.946

Об обратной задаче определения коэффициента температуропроводности. И в а н ч о в Н.И. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 30: Прикладные вопросы математического анализа. - С. 13-16 . - На укр. яз.

Установлены необходимые условия существования постоянного или зависящего от времени коэффициента температуропроводности в одномерном уравнении теплопроводности, найдено решение в виде степенного ряда. Библиогр.: 6 назв.

УДК 517.956

Обобщенная задача Дирихле для бигармонического уравнения в полупространстве / $n \geq 3$ /. З а к о п е ц Г.Н. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 30: Прикладные вопросы математического анализа. - С. 16-18 . - На укр. яз.

Построено решение задачи Дирихле для бигармонического уравнения в полупространстве, когда граничные данные являются обобщенными функциями и доказана его единственность в некотором классе бигармонических функций. Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.956

Об обобщенной задаче Рикье для бигармонического уравнения. Г у п а л о А.-В.С., К а ш и ц к а я Л.Ю. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 30: Прикладные вопросы математического анализа. - С. 18-20 . - На укр. яз.

Для бигармонического уравнения в полуплоскости и полупространстве / $n \geq 3$ / рассмотрена задача Рикье, когда заданные граничные значения являются обобщенными функциями. Получено представление решения и теорема единственности. Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.956

Об одном методе решения параболической задачи нелинейного сопряжения. Л о п у ш а н с к а я Г.П. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 30: Прикладные вопросы математического анализа. - С. 20-23 . - На укр. яз.

Доказана единственность и существование решения линейного параболического уравнения второго порядка с разрывными коэффициентами, удовлетворяющего нелинейному краевому условию и нелинейным условиям сопряжения. Методом потенциала задача сводится к системе интегральных уравнений Вольтерра, решаемой методом итераций. Библиогр.: 2 назв.

УДК 519.21

О некоторых классах положительных функций. Ш е р е м е т а М.Н., Г у з а р В.И. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып.30: Прикладные вопросы математического анализа. - С. 24 . - На укр. яз.

Пусть L - класс положительных непрерывных возрастающих к $+\infty$ на $[x_0, +\infty[$ функций. Скажем, что $\alpha \in L^0$, если $\alpha \in L$ и $\alpha((1+o(1))x) \sim \alpha(x) \, (x \to +\infty)$, а $\alpha \in L_{R0}$, если $\alpha \in L$ и для любого $\lambda \in [1, a]$, $1 < a < +\infty$, и всех $x \geqslant x_0$ выполняется неравенство $\alpha(\lambda x)/\alpha(x) \leqslant M = M(a) < +\infty$. Утверждается, что $L^0 \subset L_{R0}$, $L^0 \neq L_{R0}$ и для любой функции $\alpha \in L_{R0}$ существует функция $\beta \in L^0$ такая, что $\ln \alpha(x) - \ln \beta(x) = O(1) \, (x \to +\infty)$. Библиогр.: 2 назв.

УДК 519.21

Достаточные условия медленного возрастания выпуклых функций. - Б и л о б р а м Л.В., З а б о л о ц к и й Н.В. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 30: Прикладные вопросы математического анализа. - С. 25-27. . - На укр. яз.

Найдены достаточные условия на медленно возрастающие функции l_1, l_2 для того, чтобы функция ψ выпукла относительно $\ln_m x = \underbrace{\ln \ln \ldots \ln x}_{m\text{-раз}}$, и удовлетворяющая условию $l_1(x) \leqslant \psi(x) \leqslant l_2(x)$, $x \geqslant x_0$, была медленно возрастающей. Построены примеры, показывающие неулучшаемость этих условий. Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.948

О единственности решения обратной задачи логарифмического потенциала в одном классе потенциалов для постоянной плотности // Михалюк М.Й. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 30: Прикладные вопросы математического анализа. - С. 27-30 . - На укр. яз.

Получены условия существования единственного решения обратной задачи логарифмического потенциала для потенциалов специального вида и плотности распределения масс, равной единице.

УДК 515.12

Функторы в категории компактов, сохраняющие однородность. Заричный М.М. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 30: Прикладные вопросы математического анализа. - С. 30-32 . - На укр. яз.

Доказано, что нормальный функтор конечной степени, действующий в категории компактов и сохраняющий класс однородных компактов, изоморфен степенному функтору. Библиогр.: 3 назв.

УДК 519.71

Глобальная реакция групповых систем. Артемович О.Д. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 30: Прикладные вопросы математического анализа. - С. 32-35 . - На укр. яз.

Доказана следующая теорема. Система S групповая тогда и только тогда, когда для нее существует групповая глобальная реакция R. Библиогр.: 2 назв.

УДК 512.8

Единственность унитальных делителей матричного многочлена. З е л и с к о В.Р. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 30: Прикладные вопросы математического анализа. - С. 36-38 . - На укр. яз.

Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы выделяемый из матричного многочлена унитальный делитель был единственным с заданной формой Смита. Библиогр.: 4 назв.

УДК 512.552.12

Об адекватных кольцах. К о м а р н и ц к и й Н.Я., З а б а в с к и й Б.В. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 30: Прикладные вопросы математического анализа. - С. 39-43 . - На укр. яз.

На основании введенного понятия адекватного элемента изучаются адекватные кольца. Основной результат работы утверждает, что коммутативная область Безу является адекватной, тогда и только тогда, когда любой ее ненулевой простой идеал содержит хотя бы один адекватный элемент. Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.958:536.12

Численно-аналитическое определение установившегося решения задачи для уравнения переноса в локально-неоднородной области. Г р и ц к о Е.Г., Г у д з ь Р.В., Б у к а в и н а Р.З. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 30: Прикладные вопросы математического анализа. - С. 43-46 . - На укр. яз.

Определяется установившееся решение задачи для уравнения переноса в прямоугольной локально-неоднородной области. При этом используются интегральные преобразования Фурье в сочетании с проекционно-сеточной методикой. Библиогр.: 4 назв.

УДК 515.12

О продолжении псевдометрик на пространство вероятностных мер. Б а н а х Т.О. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 30: Прикладные вопросы математического анализа. - С. 46-48 . - На укр. яз.

Показано, что семейство псевдометрик, определяющее равномерную структуру компакта, при каноническом продолжении на пространство вероятностных мер определяет равномерную структуру на пространство вероятностных мер. Библиогр.: 2 назв.

УДК 539.377

Функция Грина стационарной осесимметрической задачи теплопроводности для многослойного цилиндра. П р о ц ю к Б.В., С и н ю т а В.М. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 30: Прикладные вопросы математического анализа. - С. 48-51 . - На укр. яз.

С использованием обобщенных функций построена функция Грина стационарной осесиметрической задачи теплопроводности для кусочно-однородного по радиусу бесконечного цилиндра. Для определения функции Грина использовано дифференциальное уравнение с сингулярными коэффициентами, учитывающее условия идеального теплового контакта на границах раздела слоев. Приводится решение задачи для кусочно-однородного по радиальной координате пространства. Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.53

Об эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого кратного ряда Дирихле. Г р е ч а н ю к Н.И. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 30: Прикладные вопросы математического анализа. - С. 51-53. . - На укр. яз.

Указывается необходимое и достаточное условие эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого кратного ряда Дирихле при удалении точки в бесконечность в некотором углу вне некоторого исключительного множества действительной плоскости. Эта же задача решена для рядов Дирихле с ограничением на рост.

УДК 517.537

О наличии исключительных значений в соотношении типа Бореля для целых рядов Дирихле. С к а с к и в О.Б. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 30: Прикладные вопросы математического анализа. - С. 53-54 . - На укр. яз.

Доказывается следующее утверждение: для любого $h > 0$ и для любой последовательности / λ_n / такой, что $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow \infty$ $(n \to +\infty)$ существует абсолютно сходящийся во всей комплексной плоскости ряд Дирихле $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, для которого имеет место неравенство

$$\ln \sup\{|F(x+iy)| : |y| < \infty\} > (1+h) \ln \max\{|a_n| e^{x\lambda_n} : n > 0\} \; (x = x_j,\, j > 0),$$

где (x_j) некоторая возрастающая к $+\infty$ последовательность. Библиогр.: 3 назв.

УДК 519.21

. Случайный процесс как свертка или амплификация. К в и т И.Д., К о с а р ч и н В.Н. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 30: Прикладные вопросы математического анализа. - С. 55-58 . - На укр. яз.

Указывается метод построения плотности случайного процесса по образующей и управляющей плотности с помощью случайной континуальной свертки или случайной континуальной амплификации. Изложение теоретических частей проиллюстрировано примерами. Библиогр.: 2 назв.

УДК 536.12

Теплопроводность остывающей пластинки с тонким включением. К о в а л ь ч у к Б.В. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 30: Прикладные вопросы математического анализа. - С. 58-61 . - На укр. яз.

С помощью преобразования Лапласа получено решение задачи теплопроводности остывающей пластинки с инородным тонким включением. Задача сводится к решению дифференциального уравнения с сингулярными коэффициентами. Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.514

Некоторые обобщения леммы Демидовича. Л и с е в и ч Л.Н. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 30: Прикладные вопросы математического анализа. - С. 61-64 . - На укр. яз.

Обобщена известная лемма Б.П.Демидовича на случай функций из пространства Степанова. Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.944:947

Экспоненциальные убывающие решения одного параболического уравнения с переменными коэффициентами. М а р т ы н е н к о Мария Д. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 30: Прикладные вопросы математического анализа. - С. 64-66. - На укр.яз.

Выписаны явные формулы экспоненциально убывающих во времени решений уравнения потерь частиц в ускорителе в виде интегралов от элементарных функций. Библиогр.: 2 назв.

УДК 512.545

Об одной задаче А.В.Архангельского. Г у р а н И.И. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 30: Прикладные вопросы математического анализа. - С. 66-67 . - На укр. яз.

Получено отрицательное решение задачи Архангельского о возможности вложения произвольной топологической группы в произведение секвенциальных групп. Существуют топологические группы,не допускающие вложения даже в произведение групп фиксированной тесноты. Показано, что произвольная группа, обладающая базисом окрестностей единицы из подгрупп, вкладывается в тотально минимальную топологическую группу. Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.947

О поведении решений эволюционного уравнения с сопряженным оператором. Г о р б а ч у к Е.Л. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 30: Прикладные вопросы математического анализа. - С. 67-69 . - На укр. яз.

Описываются аналитические продолжения решения эволюционного уравнения $(dy(t))/(dt)=Ay(t)$, где A - самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, а $t\in[0,\infty)$. Библиогр.: 2 назв.

Сборник научных трудов

Министерство высшего и среднего
специального образования УССР

Вестник Львовского университета
Серия механико-математическая
Издается с 1965 г.
Вып. 30

ПРИКЛАДНЫЕ ВОПРОСЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Львов. Издательство при Львовском государственном университете
издательского объединения
"Вища школа"

Адрес редакционной коллегии:

290000 Львов-центр, ул. Университетская, 1. Университет,
кафедра дифференциальных уравнений

Львовская областная книжная типография.
290000 Львов, ул. Стефаника, 11.
/На украинском языке/

Редактор В.В.Войтович
Технічний редактор С.Д.Довба
Коректор М.Ю.Горбаль

ОИБ № 12780

Підп. до друку 24.11.87 . БГ 10690 . Формат 60x84/16.
Папір офсетн. Офс. друк. Умовн. друк. арк. 4,65.
Умовн. фарб.-відб. 4,88 . Обл.-вид. арк. 4,64 . Тираж 600 прим.
Вид. № 1769. Зам. 4196. Ціна 95 коп. Замовне.

Львівська обласна книжкова друкарня. 290000
Львів, вул. Стефаника, 11.

95 к.

Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1988, вип. 30, 1—80.