УДК 517.948

Й.В.Людкевич, Р.Б.Скасків

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ МЕТОДАМИ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ТА ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ВИПАДКУ НЕЗАМКНУТИХ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ПОВЕРХОНЬ

Крайова задача з осьовою симетрією граничної поверхні, яку ми розглядаємо, є частковим випадком крайових задач для рівняння теплопровідності у випадку незамкнутих граничних поверхонь.

1. Нехай у тривимірному просторі R^3 задано осесиметричну гладку поверхню S. У циліндрі $Ц = D_e \times (0,\infty)$, $D_e = R^3 \setminus S$ необхідно знайти розв"язок $u(M,t) \in C^2(D_e) \cap C(\bar{Ц})$ рівняння теплопровідності

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad /1/$$

який задовольняє однорідну початкову умову

$$u\big|_{t=0} = 0 \qquad /2/$$

і граничну умову Діріхле

$$u\big|_S = f(M,t),\ M \in S,\ t \geqslant 0. \qquad /3/$$

Вважаємо, що гранична та початкова умови узгоджені

$$u\big|_{t=0} = f(M,0),\ M \in S, \qquad /4/$$

а розв"язок даної задачі існує единий.

З допомогою інтегрального перетворення Чебишева-Лагерра за часом нестаціонарну крайову задачу /1/-/4/ можна звести до системи стаціонарних граничних задач [1]:

$$\Delta u_n - \varkappa \sum_{m=0}^{n} u_m = 0, \qquad /5/$$

$$u_n\big|_S = f_n(M),\ M \in S,\ n = 0,1,\dots, \qquad /6/$$

де $U_n(M)=\int_0^\infty u(M,t)\cdot e^{-\varkappa t}L_n(\varkappa t)\,dt;$

$f_n(M)=\int_0^\infty f(M,t)\cdot e^{-\varkappa t}\,L_n(\varkappa t)\,dt,$

U_n, f_n - зображення розв"язку та граничного значення вихідної крайової задачі; L_n - поліноми Чебишева-Лагерра n -го степеня; $\varkappa$ - параметр.

Система /5/ складається з еліптичних рівнянь. Можна показати, що коли послідовність функцій $\{G_n\}_{n=0}^\infty$ - фундаментальний розв"язок цієї системи, то потенціал простого шару

$$U_n(M)=\iint_S\sum_{m=0}^{n}g_m(P)\cdot G_{n-m}(M,P)\,dS_P,\quad n=0,1,\ldots, \qquad /7/$$

де g_m - довільні функції, достатньо гладкі для того, щоб інтеграли /7/ існували, що також задовольняє її. Оскільки для довільних функцій $\{g_n\}_{n=0}^\infty$ система граничних задач /5/ - /6/ має трикутний вигляд, то функції U_n можна визначати починаючи з першої задачі /$n=0$ /, диференціальне рівняння якої однорідне, послідовно переходячи до розв"язування наступних.

2. Нехай поверхня S та граничне значення f симетричні відносно осі Oz /у декартовій системі координат/. Тоді, очевидно, що й розв"язки задач /1/ - /4/ та /5/ - /6/ не будуть залежати від азимутальної координати φ у циліндричній системі координат /r , z , φ /. Тому ці розв"язки шукатимемо лише при $\varphi=0$.

Нехай твірна L незамкнутої поверхні S задана у параметричному вигляді:

$$\begin{cases} r=r(\tau), & \tau_1\le\tau\le\tau_2, \\ z=z(\tau). \end{cases}$$

Тоді розв"язок n -ї крайової задачі /5/ - /6/ в довільній точці /$\bar r$, $\bar z$ / області D_e згідно з методом нелінійних параметрів [2] шукатимемо як

$$U_n(\bar r,\bar z)=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\sum_{m=0}^{n}g_m(\tau)\,\Phi_{n-m}(\bar r,\bar z,\tau)D(\tau)\,d\tau+ \qquad /8/$$

$$+\sum_{\nu=1}^{N_1}\sum_{m=0}^{n}C_\nu^{(m)}\,\Phi_{n-m}(\bar r,\bar z,\tau_\nu)\cdot D(\tau_\nu),\quad n=0,1,\ldots$$

де g_n — невідома густина; $g_m \; (m=\overline{0,n-1})$ — густини, визначені на попередніх етапах розв"язування;

$$\Phi_k(\bar{r},\bar{z},\tau)=\int_0^{\pi/2} G_k\left(R(\bar{r},\bar{z},\tau,\psi)\right)d\psi; \quad G_k \; (k=\overline{0,n}) \; -$$

фундаментальні розв"язки диференціальних рівнянь /5/.

Тут $$G_k(R)=\sum_{m=0}^{k}(-1)^m \frac{k!\,\varkappa^m}{(m!)^2\,(k-m)!}\,E_m(R),$$

де $$E_m(R)=(2m-3)\,E_{m-1}(R)/2\varkappa+R^2\,E_{m-2}(R)/4\varkappa,$$

а $$E_0(R)=e^{-R\sqrt{\varkappa}}/4\pi R, \quad E_1(R)=e^{-R\sqrt{\varkappa}}/8\pi\sqrt{\varkappa},$$

$$R(\bar{r},\bar{z},\tau,\psi)=\left[\bar{r}^2+r^2(\tau)-2\bar{r}\,r(\tau)\cos\psi+(\bar{z}-z(\tau))^2\right]^{1/2} \; -$$

відстань між точкою спостереження / $\bar{r}$, $\bar{z}$ / і точкою інтегрування / $r(\tau)$, $z(\tau)$ /; $D(\tau)=\left[(r'(\tau))^2+(z'(\tau))^2\right]^{1/2}$;

$C_\nu^{(n)}$ — невідомі інтенсивності у кутових точках, які враховують особливість у густині; N_1 — їх кількість; $C_\nu^{(m)} \; (m=\overline{0,n-1})$ — інтенсивності, обчислені на попередніх етапах розв"язування.

Задовольняючи граничні умови /6/, отримуємо інтегральні рівняння Фредгольма I-го роду:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} g_n(\tau)\,\Phi_0(\bar{r},\bar{z},\tau)\,D(\tau)\,d\tau+\sum_{\nu=1}^{N_1} C_\nu^{(n)}\,\Phi_0(\bar{r},\bar{z},\tau_\nu)\cdot D(\tau_\nu)=F_n(\bar{r},\bar{z}), \qquad /9/$$

де $$F_n(\bar{r},\bar{z})=f_n(\bar{r},\bar{z})-\sum_{m=0}^{n-1}\Big(\sum_{\nu=1}^{N_1} C_\nu^{(m)}\,\Phi_{n-m}(\bar{r},\bar{z},\tau_\nu)\cdot D(\tau_\nu)+$$
$$+\int_{\tau_1}^{\tau_2} g_m(\tau)\cdot\Phi_{n-m}(\bar{r},\bar{z},\tau)\cdot D(\tau)\,d\tau\Big).$$

Під час розв"язування рівнянь /9/ невідомі густини g_n зображали у вигляді суми дробово-раціональних функцій [2]:

$$g_n(\tau)=\sum_{k=1}^{\bar{N}} a_{kn}\cdot d_k(\tau), \qquad /10/$$

де a_{kn} — невідомі коефіцієнти; $d_k(\tau)=b_k/\left[b_k^2+(\tau-\tau_k)^2\right]$ — дробово-раціональні функції; τ_k — точки побудови густини; b_k — нелінійні параметри.

Граничні умови /6/ задовольняли у точках колокації на допоміжній твірній L', достатньо близькій до твірної L. Таким чином отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь з добре зумовленою матрицею. Вигляд цієї матриці для кожної із задач /5/ - /6/ один і той же. Після розв"язування отриманої системи лінійних алгебраїчних рівнянь значення розв"язку в довільній точці / $\bar{r}$, $\bar{z}$ / області D_e знаходили за формулою /8/.

Як відомо [1], оригінал через трансформанти однозначно можна зобразити рядом

$$u(\bar{r},\bar{z},t)=\varkappa\sum_{n=0}^{\infty}u_n(\bar{r},\bar{z})\cdot L_n(\varkappa t). \qquad /11/$$

Збіжність цього ряду за часом нерівномірна на всій півосі $t \geq 0$. Але, як засвідчив обчислювальний експеримент, за допомогою параметра $\varkappa$ можна керувати швидкістю збіжності ряду /11/.

Як числовий розв"язок брали часткову суму /11/:

$$u_N(\bar{r},\bar{z},t)=\varkappa\sum_{n=0}^{N}u_n(\bar{r},\bar{z})\cdot L_n(\varkappa t). \qquad /12/$$

Обчислення нових коефіцієнтів u_n ряду /11/ проводили доти, поки u_N з достатньою точністю не задовольняло початкову умову /2/ вихідної задачі.

3. Описаний підхід до розв"язування нестаціонарної задачі /1/ - /4/ реалізовано у вигляді комплексу програм на мові Фортран-IУ. Комплекс програм апробовано на ряді прикладів.

Приклад 1. Обчислити температурне поле за межами осесиметричної сфери одиничного радіуса, коли граничне значення не залежить від просторових координат і має вигляд $f(t)=t\cdot e^{-t}$.

Чисельний розв"язок одержано при $\bar{N}=18$ і $N=12$. Для точок спостереження на осі OZ /$Z=1{,}01+$/p-1/ 0,2, де p - номер лінії/, на рис. 1 показано графіки чисельних розв"язків. При цьому похибка задоволення граничної умови не перевищувала 0,004, а початкової - 0,006.

Приклад 2. Обчислити температурне поле за межами еліпсоїда обертання, коли граничне значення має вигляд

$$f(t)=\begin{cases}0, & t>2,\\ (4-t^2)\cdot t/4, & 0\le t\le 2.\end{cases}$$

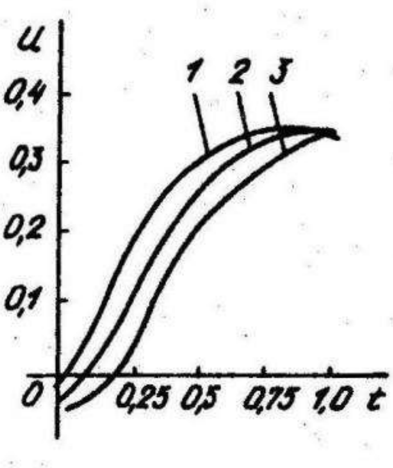

Рис. I

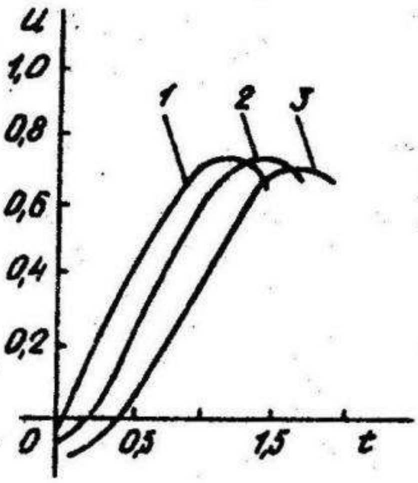

Рис. 2

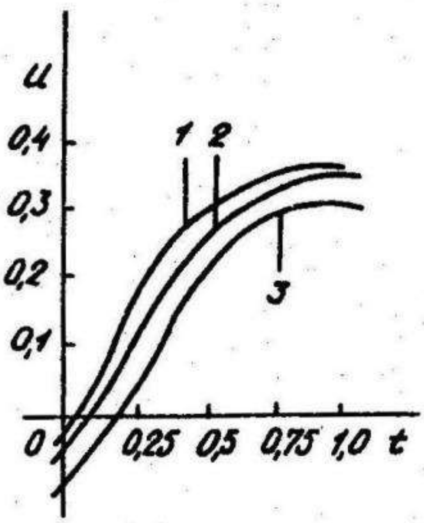

Рис. 3

Чисельний розв"язок отримано при $\bar{N}=13$ і $N=12$ у точках спостереження на осі OZ /$Z=2{,}0+(p-1)\cdot 0{,}2$, де p - номер лінії/ /рис. 2/. Точність задоволення граничного значення не перевищувала 0,05, а початкового - 0,001.

Приклад 3. Розглянемо задачу, аналогічну тій, яка розглядалась в прикладі 1, але для випадку, коли гранична поверхня незамкнута і є одиничною сферою зі зрізаним полюсом.

Графіки чисельних розв"язків цієї задачі для різних діафрагм зображено на рис. 3 /номер лінії відповідає значенню τ_1 : $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{8}$ /. Для точки спостереження на осі OZ $z=1,01$. Точність задоволення початкових умов при $N=18$ і $N=12$ не перевищувала 0,05.

1. Г а л а з ю к В.А. Метод поліномів Чебишева-Лагерра в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку із постійними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1981. 2. Л ю д к е в и ч И.В., М у з ы ч у к А.Е. Численное решение граничных задач для уравнения $\Delta U - \varkappa^2 U = 0$ в случае незамкнутых поверхностей. Львов. 1982. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 3658-82.

Стаття надійшла до редколегії 05.03.88

УДК 517.949:517.956

М.Д.Коркуна, А.М.Кузик, І.І.Чулик

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СУМАРНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ДЛЯ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Розглянемо крайову задачу [2]

$$C(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$$(r,z,t)\in Q_T,\ u(r,z,t)\big|_{t=0} = u_0,\ (r,z)\in\Omega \qquad /1/$$

при $r=0$:

$$C(u)\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right);$$

$$u(r,z,t)\big|_{r=a} = u_0,\ u(r,z,t)\big|_{z=0} = u_0,\ \lambda(u)\ \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=H} = q, \qquad /2/$$

де $\Omega = \{(r,z):\ 0<r<a,\ 0<z<H\},\ Q_T = \Omega\times(0,T);$

$q = \begin{cases} q_0, & r\le r_0, \\ 0, & r>r_0, \end{cases}$ q_0, u_0 - константи.