Графіки чисельних розв"язків цієї задачі для різних діафрагм зображено на рис. 3 /номер лінії відповідає значенню $\tau_1$ : $\frac{\pi}{8}$ , $\frac{\pi}{4}$ , $\frac{3\pi}{8}$ /. Для точки спостереження на осі $OZ$ $z=1,01$. Точність задоволення початкових умов при $N=18$ і $N=12$ не перевищувала 0,05.


1. Г а л а з ю к В.А. Метод поліномів Чебишева-Лагерра в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку із постійними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1981. 2. Л ю д к е в и ч И.В., М у з ы ч у к А.Е. Численное решение граничных задач для уравнения $\Delta U - \varkappa^2 U = 0$ в случае незамкнутых поверхностей. Львов. 1982. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 3658-82.



Стаття надійшла до редколегії 05.03.88



УДК 517.949:517.956



М.Д.Коркуна, А.М.Кузик, І.І.Чулик


## ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СУМАРНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ДЛЯ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Розглянемо крайову задачу [2]

$$C(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$$(r,z,t)\in Q_T,\ u(r,z,t)\Big|_{t=0} = u_0,\ (r,z)\in\Omega \qquad /1/$$

при $r=0$:

$$C(u)\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right);$$

$$u(r,z,t)\Big|_{r=a} = u_0,\ u(r,z,t)\Big|_{z=0} = u_0,\ \lambda(u)\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=H} = q, \qquad /2/$$

де $\Omega = \{(r,z):\ 0<r<a,\ 0<z<H\}$, $Q_T = \Omega\times(0,T)$;

$q = \begin{cases} q_0, & r\le r_0, \\ 0, & r>r_0, \end{cases}$ $q_0$ , $u_0$ – константи.

На відрізку $[0, T]$ введемо рівномірну сітку

$$\bar{\omega}_\tau = \left\{ t = t_j = j\tau : j = 0,1,\ldots,K,\ \tau = \frac{T}{K} \right\}.$$

До задачі /1/, /2/ застосовуємо метод сумарної апроксимації, беручи за основу адитивну модель з розпаралелюванням [1] . Згідно з цим методом розв"язування задачі /1/, /2/ зводиться до відшукання розв"язку системи

$$\begin{cases} \frac{1}{2} C(v_1) \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r\lambda(v_1) \frac{\partial v_1}{\partial r} \right), & t_j < t \le t_{j+1},\ (r,z) \in \Omega, \\ \frac{1}{2} C(v_2) \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda(v_2) \frac{\partial v_2}{\partial z} \right), & t_j < t \le t_{j+1},\ (r,z) \in \Omega, \end{cases} \qquad /3/$$

$$j = \overline{0, K-1}$$

при початкових і крайових умовах

$$v_\alpha(r,z,t)\Big|_{t=0} = u_0,\ v_\alpha(r,z,t_j) = \bar{v}(r,z,t_j),\ \alpha = 1,2, \qquad /4/$$

і
$$\begin{cases} \frac{1}{2} C(v_1) \frac{\partial v_1}{\partial t} = 2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda(v_1) \frac{\partial v_1}{\partial r} \right), & t_j < t \le t_{j+1},\ 0 < z < H, \\ \frac{1}{2} C(v_2) \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda(v_2) \frac{\partial v_2}{\partial z} \right), & t_j < t \le t_{j+1},\ 0 < z < H, \end{cases} \qquad /5/$$

$$v_1(r,z,t)\Big|_{r=a} = u_0, \qquad v_2(r,z,t)\Big|_{z=0} = u_0,\ \lambda(v_2) \frac{\partial v_2}{\partial z}\Big|_{z=H} = q$$

при $r = 0$.

За наближений розв"язок задачі /1/, /2/ при $t \in \omega_\tau$ приймаємо функцію $\bar{v}(r,z,t) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} v_\alpha(r,z,t)$, де $r \in [0,a]$, $z \in (0,H)$.

В області $\Omega$ введемо рівномірну сітку

$$\bar{\omega}_h = \left\{ (r_{i_1}, z_{i_2}) = (i_1 h_1; i_2 h_2) : i_\alpha = 0,1,\ldots,N_\alpha,\ N_1 h_1 = a,\ N_2 h_2 = H,\ \alpha = 1,2 \right\}.$$

Беручи за основу адитивну модель методу сумарної апроксимації /3/ - /5/, побудуємо економну різницеву схему [ 3 ] :

$$\frac{1}{2} C(\bar{y}^j_{ik}) \frac{y^{j+1}_{1,ik} - \bar{y}^j_{ik}}{\tau} = \frac{1}{r_i} \left( r_i \lambda \left( \frac{\bar{y}^j_{ik} + \bar{y}^j_{i-1,k}}{2} \right) y^{j+1}_{1,\bar{r}} \right)_{r},\ i = \overline{1, N_1 - 1}, \qquad /6/$$

$$\frac{1}{2}C(\bar{y}^j_{i,k})\frac{y^{j+1}_{2,i,k}-\bar{y}^j_{i,k}}{\tau}=\left(\lambda\left(\frac{\bar{y}^j_{i,k}+\bar{y}^j_{i,k-1}}{2}\right)y^{j+1}_{2\bar{z}}\right)z,\ k=\overline{1,N_2-1},\ j=\overline{0,K-1},$$

$$y^0_{\alpha,i,k}=U_0,\quad \bar{y}^j_{i,k}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}y^j_{\alpha,i,k}, \qquad /7/$$

$$C(\bar{y}^j_{0,k})(y^{j+1}_{1,0,k}-\bar{y}^j_{0,k})=\frac{8\tau}{h^2}\lambda\left(\frac{\bar{y}^j_1+\bar{y}^j_{0,k}}{2}\right)\left(y^{j+1}_{1,1,k}-y^{j+1}_{1,0,k}\right),$$

$$y^{j+1}_{1,N_1,k}=U_0,\quad y^{j+1}_{2,i,0}=U_0, \qquad /8/$$

$$y^{j+1}_{2,i,N_2}=\frac{2q\,h_2}{3\lambda(\bar{y}^j_{i,k})}+\frac{4}{3}y^{j+1}_{2,i,N_2-1}-\frac{1}{3}y^{j+1}_{2,i,N_2-2}.$$

При фіксованому $j=\overline{0,K-1}$ кожне рівняння системи /6/ зводиться до триточкового різницевого рівняння і його можна розв"язати методом прогонки.

Для реалізації різницевої схеми /6/ - /8/ при $T=4c$ з кроком $h_1=h_2=0{,}5\,мм$, $\Delta t=0{,}01\,c$ складена програма на мові Фортран. Параметрам надані числові значення, які трапляються в практиці: $q_0=2{,}25\,ккал/ч\cdot м^2$, $z_0=2\,мм$, $U_0=100^\circ$.

Наведемо результати обчислень на ЕОМ:

| $t, c$ | Неявна схема | Економна схема |
|---|---|---|
| 0,25 | 1054,7 | 1062,1 |
| 0,50 | 1170,9 | 1172,4 |
| 0,75 | 1220,2 | 1238,9 |
| 1,00 | 1236,9 | 1294,9 |
| 1,25 | 1243,4 | 1325,3 |
| 1,50 | 1246,0 | 1346,7 |
| 1,75 | 1247,1 | 1364,3 |
| 2,00 | 1247,6 | 1375,9 |

В першій колонці наведено чисельний розв"язок задачі /1/, /2/, отриманий за неявною різницевою схемою. При реалізації даної схеми використовували метод матричної прогонки. Друга і третя колонки - це результати обчислень з допомогою економічної різницевої схеми методу сумарної апроксимації /6/ - /8/. Причому, як випливає з результатів обчислень, за неявною схемою отримуємо чисельний розв"язок задачі /1/, /2/ з недостачею, а за схемою /6/ - /8/ - з надлишком.

1. Гордезиани Д.Г., Самарский А.А. Некоторые задачи термоупругости пластин и оболочек и метод суммарной аппроксимации //Комплексный анализ и его приложения. М., 1978. С.173-186. 2. Коркуна М.Д. Решение нелинейной задачи теплопроводности при интенсивном локальном и поверхностном нагреве методом сеток //Мат. методы и физ.-мех. поля. 1982. Вып.15. С.82-84. 3. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., 1983.

Стаття надійшла до редколегії 30.06.87

УДК 517.944:947

Марія Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко

## ЕКВІВАЛЕНТНА ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ДЛЯ ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВНИХ СИСТЕМ

Наведемо наближені схеми розв"язування нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, що грунтуються на їх заміні лінійними рівняннями спеціального вигляду, як продовження публікацій [1-3].

1. Розглянемо задачу Коші

$$u'' + f(u)u' + g(u) = h(t), \qquad /1/$$

$$u\Big|_{t=0} = u_0, \quad u'\Big|_{t=0} = u_1, \qquad /2/$$

де $u_0$, $u_1$ - сталі, причому $u_0$ відмінна від нуля /цього завжди можна досягнути з допомогою заміни шуканого розв"язку/; $f(u)$, $h(t)$ - неперервні функції своїх аргументів, а $g(u)$ задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $K_g$.

Рівняння /1/ перепишемо у такому еквівалентному вигляді:

$$u'' + \frac{d}{dt}\mathcal{F}(u) + g(u) = h(t), \qquad /1'/$$

де

$$\mathcal{F}(u) = \int_{a_0}^{u(t)} f(\tau)\,d\tau \quad (a_0 = \mathrm{const}). \qquad /3/$$

Так визначена функція $\mathcal{F}(u)$ задовольнятиме умову Ліпшиця зі сталою $K_{\mathcal{F}}$.