чисельний розв"язок задачі /1/, /2/ з недостачею, а за схемою /6/ - /8/ - з надлишком.

1. Г о р д е з и а н и Д.Г., С а м а р с к и й А.А. Некоторые задачи термоупругости пластин и оболочек и метод суммарной аппроксимации //Комплексный анализ и его приложения. М., 1978. С.173-186. 2. К о р к у н а М.Д. Решение нелинейной задачи теплопроводности при интенсивном локальном и поверхностном нагреве методом сеток //Мат. методы и физ.-мех. поля. 1982. Вып.15. С.82-84. 3. С а м а р с к и й А.А. Теория разностных схем. М., 1983.

Стаття надійшла до редколегії 30.06.87

УДК 517.944:947

Марія Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко

# ЕКВІВАЛЕНТНА ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ДЛЯ ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВНИХ СИСТЕМ

Наведемо наближені схеми розв"язування нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, що грунтуються на їх заміні лінійними рівняннями спеціального вигляду, як продовження публікацій [1-3].

1. Розглянемо задачу Коші

$$u'' + f(u)u' + g(u) = h(t), \tag{1}$$

$$u\Big|_{t=0} = u_0, \quad u'\Big|_{t=0} = u_1, \tag{2}$$

де $u_0$, $u_1$ - сталі, причому $u_0$ відмінна від нуля /цього завжди можна досягнути з допомогою заміни шуканого розв"язку/; $f(u)$, $h(t)$ - неперервні функції своїх аргументів, а $g(u)$ задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $K_g$.

Рівняння /1/ перепишемо у такому еквівалентному вигляді:

$$u'' + \frac{d}{dt}\mathcal{F}(u) + g(u) = h(t), \tag{1'}$$

де

$$\mathcal{F}(u) = \int_{a_0}^{u(t)} f(\tau)\,d\tau \qquad (a_0 = \mathrm{const}). \tag{3}$$

Так визначена функція $\mathcal{F}(u)$ задовольнятиме умову Ліпшиця зі сталою $K_{\mathcal{F}}$.

Наближений розв"язок задачі /1'/ - /2/ визначимо як розв"язок наступної лінійної задачі Коші:

$$\tilde{u}'' + K_1 \tilde{u}' + K_2 \tilde{u} = h(t), \qquad /4/$$

$$\tilde{u}\Big|_{t=0} = u_0, \quad \tilde{u}'\Big|_{t=0} = u_1, \qquad /5/$$

де

$$K_1 = \frac{\mathcal{F}(u_0)}{u_0}, \quad K_2 = \frac{g(u_0)}{u_0}. \qquad /6/$$

Оцінимо близькість розв"язків $u(t)$, $\tilde{u}(t)$ задач /1/ - /2/ та /4/ - /5/, припускаючи, що $\tilde{u}(t)$ належить області визначення функцій $\mathcal{F}(u)$ і $g(u)$. Зобразимо їх різницю у такому вигляді:

$$u(t) - \tilde{u}(t) = -\int_0^t (t-\tau)\left\{\frac{d}{d\tau}\mathcal{F}(u(\tau)) + g(u(\tau)) - K_1 \tilde{u}'(\tau) - K_2 \tilde{u}(\tau)\right\} d\tau. \quad /7/$$

Після інтегрування за частинами /7/ набирає вигляду

$$u(t) - \tilde{u}(t) = \int_0^t \left\{\mathcal{F}(u(\tau)) - K_1 \tilde{u}(\tau) - \left[g(u(\tau)) - K_2 \tilde{u}(\tau)\right](t-\tau)\right\} d\tau. \qquad /8/$$

Враховуючи /6/, маємо

$$|\mathcal{F}(u) - K_1 \tilde{u}| < K_{\mathcal{F}} |u - \tilde{u}| + \left[\frac{|\mathcal{F}(u_0)|}{|u_0|} + K_{\mathcal{F}}\right] \cdot |\tilde{u} - u_0|, \qquad /9/$$

$$|g(u) - K_2 \tilde{u}| < K_g |u - \tilde{u}| + \left[\frac{|g(u_0)|}{|u_0|} + K_g\right] \cdot |\tilde{u} - u_0|. \qquad /10/$$

Враховуючи /9/ та /10/, із /8/ одержуємо нерівність

$$\max_{t \in [0, t_1]} |u(t) - \tilde{u}(t)| < \frac{A}{B} \max_{t \in [0, t_1]} |\tilde{u}(t) - u_0|, \qquad /11/$$

де

$$A = \frac{|\mathcal{F}(u_0)|}{|u_0|} + |t_1| K_{\mathcal{F}} + t_1^2 \left[\frac{|g(u_0)|}{|u_0|} + K_g\right];$$

$$B = 1 - |t_1| \cdot K_{\mathcal{F}} - t_1^2 \cdot K_g.$$

При цьому значення $t_1$ вибираєм так, щоб завжди була виконана умова $\beta > 0$. Різницю $u'(t) - \tilde{u}'(t)$ легко оцінити на основі аналогічних міркувань.

2. Розглянемо більш загальне нелінійне диференціальне рівняння

$$u'' + f(u)\varphi(u') + g(u) = h(t), \qquad /12/$$

де $f, \varphi, g$ задовольняють умову Ліпшиця зі сталими $K_f, K_\varphi, K_g$; $h(t)$ - неперервна функція.

Нехай $\tilde{u}(t)$ - розв"язок такої лінійної задачі Коші:

$$\tilde{u}'' + K_1 K_3 \tilde{u}' + K_2 \tilde{u} = h(t),$$
$$\tilde{u}\Big|_{t=0} = u_0, \quad \tilde{u}'\Big|_{t=0} = u_1, \qquad /13/$$

де $u_0, u_1$ - відмінні від нуля сталі; $K_i \ (i=1,2,3)$ визначають рівності

$$K_1 = \frac{\varphi(u_1)}{u_1}, \quad K_3 = f(u_0), \quad K_2 = \frac{g(u_0)}{u_0}. \qquad /14/$$

Припускаючи, що розв"язок $\tilde{u}(t)$ задачі /13/ належить області визначення функцій $f, \varphi, g$, можна легко оцінити його близькість до розв"язку $u(t)$ вихідної задачі Коші /12/ - /2/. Насправді для відповідних різниць $u(t) - \tilde{u}(t)$, $u'(t) - \tilde{u}'(t)$ маємо очевидні рівності:

$$u(t) - \tilde{u}(t) = -\int_0^t (t-\tau)\left\{f(u(\tau))\varphi(u'(\tau)) - K_1K_3\tilde{u}'(\tau) + g(u(\tau)) - K_2\tilde{u}(\tau)\right\}d\tau, \qquad /15/$$

$$u'(t) - \tilde{u}'(t) = -\int_0^t \left\{f(u(\tau))\varphi(u'(\tau)) - K_1K_3\tilde{u}'(\tau) + g(u(\tau)) - K_2\tilde{u}(\tau)\right\}d\tau. \qquad /16/$$

Із /14/ та припущень відносно $f, \varphi, g$ випливає нерівність

$$|f(u)\varphi(u') - K_1K_3\tilde{u}'| \le K_f K_\varphi |u-u_0| \cdot |u'-u_1| + K_f |\varphi(u_1)| \cdot |u-u_0| +$$
$$+ K_\varphi \cdot |f(u_0)| \cdot |u'-u_1| + \frac{|f(u_0)| \cdot |\varphi(u_1)|}{|u_1|} \cdot |\tilde{u}' - u_1|.$$

Звідси маємо

$$|f(u)\varphi(u')-K_1K_3\tilde{u}'|\leq \frac{1}{2}K_f K_\varphi(|u-\tilde{u}|^2+|u'-\tilde{u}'|^2)+a|u-\tilde{u}|+b|u'-\tilde{u}'|+$$

$$+c|\tilde{u}-u_0|^2+d|\tilde{u}'-u_1|^2+e|\tilde{u}-u_0|+h|\tilde{u}'-u_1|, \qquad /17/$$

причому сталі $a, b, c, d, e, h$ виписуються явно на основі звичайних міркувань і залежать від $K_f$, $K_\varphi$, $|f(u_0)|, |\varphi(u_1)|$ та $|u_1|$. Формули /10/, /17/, /15/ та /16/ дають змогу оцінити

$\max\limits_{t\in[0,t_1]}|u(t)-\tilde{u}(t)|$, $\max\limits_{t\in[0,t_1]}|u'(t)-\tilde{u}'(t)|$ через $|\tilde{u}-u_0|$ та $|\tilde{u}'-u_1|$ при відповідному виборі $t_1$. Однак остаточні формули тут не наводимо внаслідок їхньої громіздкості. Більш прості оцінки можна одержати у випадку обмеженості однієї з функцій $f(u)$ або $\varphi(u')$. А саме, якщо $f(u)$ задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $K_f$, крім того, існує така стала $C$, коли $|f(u)|\leq C$ для всіх $u$ з області визначення цієї функції, то

$$|f(u)\varphi(u')-K_1K_3\tilde{u}'+g(u)-K_2\tilde{u}|\leq$$

$$\leq CK_\varphi|u'-\tilde{u}'|+[K_g+|\varphi(u_1)|\cdot K_f]\cdot|u-\tilde{u}|+$$

$$+\left[CK_\varphi+\left|\frac{f(u_0)\cdot\varphi(u_1)}{u_1}\right|\right]\cdot|\tilde{u}'-u_1|+\left[K_g+\left|\frac{g(u_0)}{u_0}\right|+|\varphi(u_1)|K_f\right]|\tilde{u}-u_0|.$$

Із /15/ та /16/ одержуємо

$$\max_{t\in[0,t_1]}|u(t)-\tilde{u}(t)|\leq t_1^2\max_{t\in[0,t_1]}\Big\{CK_\varphi|u'-\tilde{u}'|+[K_g+|\varphi(u_1)|K_f]\cdot|u-\tilde{u}|+$$

$$+\left[CK_\varphi+\left|\frac{f(u_0)\cdot\varphi(u_1)}{u_1}\right|\right]\cdot|\tilde{u}'-u_1|+\left[K_g+\left|\frac{g(u_0)}{u_0}\right|+|\varphi(u_1)|K_f\right]\cdot|\tilde{u}-u_0|\Big\}, \qquad /18/$$

$$\max_{t\in[0,t_1]}|u'(t)-\tilde{u}'(t)|\leq t_1\max_{t\in[0,t_1]}\Big\{CK_\varphi|u'-\tilde{u}'|+[K_g+|\varphi(u_1)|K_f]|u-\tilde{u}|+$$

$$+\left[CK_\varphi+\left|\frac{f(u_0)\varphi(u_1)}{u_1}\right|\right]\cdot|\tilde{u}'-u_1|+\left[K_g+\left|\frac{g(u_0)}{u_0}\right|+|\varphi(u_1)|K_f\right]\cdot|\tilde{u}-u_0|\Big\}. \qquad /19/$$

Із /19/ маємо

$$\max_{t\in[0,t_1]} |u'(t)-\tilde{u}'(t)| \leq \frac{t_1}{1-t_1CK_\varphi} \max_{t\in[0,t_1]} \Big\{ [K_g+K_f|\varphi(u_1)|]\cdot|u-\tilde{u}|+$$

$$+\Big[CK_\varphi+\Big|\frac{f(u_0)\varphi(u_1)}{u_1}\Big|\Big]|\tilde{u}'-u_1|+\Big[K_g+\Big|\frac{g(u_0)}{u_0}\Big|+K_f\cdot|\varphi(u_1)|\Big]\cdot|\tilde{u}-u_0|\Big\}.$$

Тому /18/ приводить до оцінки

$$\max_{t\in[0,t_1]} |u(t)-\tilde{u}(t)| \leq \frac{t_1^2}{1-t_1CK_\varphi-t_1^2[K_g+K_f|\varphi(u_1)|]} \times$$

$$\times \max_{t\in[0,t_1]} \Big\{ \Big[CK_\varphi+\Big|\frac{f(u_0)\varphi(u_1)}{u_1}\Big|\Big]\cdot|\tilde{u}'-u_1|+\Big[K_g+\Big|\frac{g(u_0)}{u_0}\Big|+K_f|\varphi(u_1)|\Big]\times$$

$$\times|\tilde{u}-u_0|\Big\} \qquad /20/$$

При виведенні оцінки /20/ припускали, що $t_1, C, K_\varphi, K_f, K_g$ задовольняють такі дві умови:

$$1-t_1CK_\varphi>0,$$

$$1-t_1CK_\varphi-t_1^2[K_g+K_f|\varphi(u_1)|]>0.$$

Аналогічну нерівність можна дістати і для $\max_{t\in[0,t_1]} |u'-\tilde{u}'|$.

На закінчення відзначимо, що є змога аналогічним шляхом розглянути випадок обмеженості функції $\varphi(u')$.

1. Мартиненко Марія Д., Мартиненко Михайло Д. Модифікований метод еквівалентної лінеаризації для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1987. Вип.27. С.55-57. 2. Мартиненко Марія Д., Мартиненко Михайло Д. Про модифікований метод еквівалентної лінеаризації для звичайних нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1988. Вип.28. С.40-42. 3. Мартиненко Марія Д., Мартиненко Михайло Д. Еквівалентна лінеаризація для рівнянь Льєнара //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1988. Вип.28. С.42-45.

Стаття надійшла до редколегії 31.08.87