УДК 517.944:947

Марія Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко

МЕТОД СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ ДЛЯ ОДНІЄЇ НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ

Розглянемо задачу про знаходження розв"язку типу плоскої хвилі для рівняння Фішера-Колмогорова-Петровського-Піскунова:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Ku(1-u) + D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad /1/$$

де K, D - додатні сталі; $-\infty < x < +\infty$, $0 < t < +\infty$. Рівняння /1/, запропоноване в 1937 р. [3,4] як найпростіша логістична модель росту популяції, потім з"явилось у задачі про поширення полум"я [1] та інших задачах про хвильові процеси у збудливих середовищах [2].

Записуючи шуканий розв"язок /1/ у вигляді

$$u(x,t) = f(x+ct) \equiv f(z),\ z = x+ct, \qquad /2/$$

одержуємо для f рівняння

$$Df''(z) - cf'(z) + Kf(1-f) = 0, \qquad /3/$$

де c - швидкість поширення плоскої хвилі. Оскільки рівняння /1/ інваріантне відносно заміни x на $-x$, то c може бути додатною або від"ємною величиною. Якщо вважати $c>0$, то /2/ зображатиме хвилю, яка рухається у від"ємному напрямі осі x. Тому що /1/ інваріантне відносно замін вигляду $x = x' + x_0$, $t = t' + t_0$ (x_0, t_0 - сталі/, то до $z = x + ct$ можна додати довільну сталу.

Вихідна задача про існування і форму розв"язку /1/ типу біжучої хвилі /2/ зводиться до знаходження таких значень c, при яких рівняння /3/ має нетривіальні розв"язки, що задовольняють умови

$$\lim_{z\to-\infty} f(z) = 0, \qquad \lim_{z\to+\infty} f(z) = 1, \qquad /4/$$

$$0 \leqslant f(z) \leqslant 1, \qquad -\infty \leqslant z \leqslant +\infty. \qquad /5/$$

Беручи до уваги інваріантність шуканого розв"язку відносно зсувів і /5/, бачимо, що до /4/ можна приєднати умову

$$f(0) = \frac{1}{2}. \qquad /6/$$

Існування розв"язків цієї задачі при $C > C_{min} = 2\sqrt{\kappa D}$ доведено у [3,4]. Пропонуємо один варіант побудови точного розв"язку /3/ з допомогою рядів. Для цього зробимо в /3/ заміну незалежної змінної

$$\xi = \frac{e^z}{1+e^z}, \qquad /7/$$

яка перетворює інтервал]-∞, +∞[у відрізок [0,1]. Тоді задача /3/ - /5/ перетворюється до вигляду

$$D\xi^2(1-\xi)^2 f''_{\xi\xi} - \xi(1-\xi)[2D\xi - D + C]f'_\xi + \kappa f(1-f) = 0; \qquad /8/$$

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1; \qquad /9/$$

$$0 \leq f(\xi) \leq 1, \quad 0 \leq \xi \leq 1; \qquad /10/$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \qquad /11/$$

Рівняння /8/ нелінійне зі змінними коефіцієнтами, які перетворюються в нуль при $\xi = 0$ та $\xi = 1$. Шукаємо його розв"язок у вигляді узагальненого степеневого ряду

$$f(\xi) = \xi^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n, \qquad /12/$$

де λ, a_n - невідомі сталі. Підставляючи /12/ у /8/ та виконуючи диференціювання під знаком суми, одержуємо

$$D(1-\xi)^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda+n)(\lambda+n-1)\xi^{\lambda+n} -$$

$$-(1-\xi)(2D\xi - D + C)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda+n)\xi^{\lambda+n} +$$

$$+\kappa\sum_{n=0}^{\infty} a_n\xi^{\lambda+n} - \kappa\sum_{n=0}^{\infty} C_n\xi^{2\lambda+n} = 0$$

/13/

або

$$\sum_{n=0}^{\infty} Da_n(\lambda+n)(\lambda+n+1)\,\xi^{\lambda+n+2} -$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda+n)[2D(\lambda+n)+D-C]\,\xi^{\lambda+n+1} +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} a_n[K+D(\lambda+n)^2-C(\lambda+n)]\,\xi^{\lambda+n} - \sum_{n=0}^{\infty} K C_n \xi^{2\lambda+n} = 0. \qquad /14/$$

Тут $C_n = \sum_{m=0}^{n} a_m\, a_{n-m}$. Вимагаємо, щоб коефіцієнт при ξ^{λ} дорівнював нулю. Тоді

$$D\lambda^2 - C\lambda + K = 0. \qquad /15/$$

Нехай

$$C = \frac{DN^2+K}{N}, \qquad /16/$$

де N – ціле додатне число $/N = 1,2,3,\ldots/$. Тоді серед коренів /15/ обов"язково буде $\lambda_1 = N$ і в цьому випадку рівність /13/ дає змогу одержати такі рекурентні формули для визначення $a_n\ (n \geq 1)$ через a_0 :

$$a_1[K-C(N+1)+D(N+1)^2] - a_0 N[D(2N+1)-C] = 0;$$

$$a_{n+2}[K+D(N+n+2)^2-C(N+n+2)] - a_{n+1}(N+n+1)[2D(N+n+1)+D-C] +$$

$$+ Da_n(n+N)(N+n+1) = 0 \quad \text{при} \quad n < N-2;$$

$$a_{n+2}[K+D(N+n+2)^2-C(N+n+2)] - a_{n+1}(N+n+1)[2D(N+n+1)+$$

$$+D-C] + Da_n(N+n)(N+n+1) - KC_{n+2-N} = 0 \quad \text{при} \quad n > N-2,$$

де C визначається формулою /16/. Оскільки $\lambda = N \in \mathbb{N}$, то ряд /12/ перетворюється в нуль при $\xi = 0$. Сталу a_0 можна визначити з другої граничної умови задачі при $\xi = 1$, або застосовуючи деякі додаткові міркування.

Аналогічна схема при побудові степеневого розв"язку рівняння /8/ в околі точки $\xi = 1$.

1. Баренблатт Г.И., Зельдович Я.Б. Об устойчивости распространения пламени //Приклад. мат. и мех. 1957. Т.21. № 6. С.856-859. 2. Зыков В.С. Моделирование волновых процессов в возбудимых средах. М., 1984. 3. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме //Бюл. Москов. ун-та. Сер. А. 1937. Мат. и мех. Т.1. С.1-25. 4. Fischer R.A. The wave of advantageous genes // Ann. Eugenics. 1937. Vol 7. p. 355-369.

Стаття надійшла до редколегії 31.08.87

УДК 519.6

Ю.М.Щербина, Б.М.Голуб

УМОВИ ЗБІЖНОСТІ КВАЗІНЬЮТОНІВСЬКОЇ МОДИФІКАЦІЇ МЕТОДУ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ

Нехай $f_i(x),\ i = \overline{0,m}$ – неперервно диференційовані функції. Для розв"язування задачі нелінійного програмування

$$\min_x \left\{ f_0(x): \quad f_i(x) \le 0, \quad i = \overline{1,m} \right\} \qquad /1/$$

в [3,4] запропоновано квазіньютонівську модифікацію методу лінеаризації, яка полягає в наступному.

Нехай задані числа $N>0,\ S>1,\ \delta>0,\ 0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, $c_0>0,\ 0<\gamma<1$.

Поставимо у відповідність точці x допоміжну задачу

$$\min_p \left\{ p^T f_0'(x) + \frac{1}{2} p^T A p: \quad p^T f_i'(x) + f_i(x) \le 0,\ i \in J_\delta(x) \right\}, \qquad /2/$$

де A – симетрична додатно визначена матриця,

$$J_\delta(x) = \left\{ i: f_i(x) \ge F(x) - \delta \right\},\quad F(x) = \max\left\{0, f_1(x), \dots, f_m(x)\right\}.$$