де C визначається формулою /16/. Оскільки $\lambda = N \in \mathbb{N}$, то ряд /12/ перетворюється в нуль при $\xi = 0$. Сталу a_0 можна визначити з другої граничної умови задачі при $\xi = 1$, або застосовуючи деякі додаткові міркування.

Аналогічна схема при побудові степеневого розв"язку рівняння /8/ в околі точки $\xi = 1$.

1. Баренблатт Г.И., Зельдович Я.Б. Об устойчивости распространения пламени //Приклад. мат. и мех. 1957. Т.21. № 6. С.856-859. 2. Зыков В.С. Моделирование волновых процессов в возбудимых средах. М., 1984. 3. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме //Бюл. Москов. ун-та. Сер. А. 1937. Мат. и мех. Т.1. С.1-25. 4. Fischer R.A. The wave of advantageous genes // Ann. Eugenics. 1937. Vol 7. p. 355-369.

Стаття надійшла до редколегії 31.08.87

УДК 519.6

Ю.М.Щербина, Б.М.Голуб

УМОВИ ЗБІЖНОСТІ КВАЗІНЬЮТОНІВСЬКОЇ МОДИФІКАЦІЇ МЕТОДУ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ

Нехай $f_i(x),\ i = \overline{0,m}$ – неперервно диференційовані функції. Для розв"язування задачі нелінійного програмування

$$\min_x \left\{ f_0(x) :\ f_i(x) \le 0,\ i = \overline{1,m} \right\} \qquad /1/$$

в [3,4] запропоновано квазіньютонівську модифікацію методу лінеаризації, яка полягає в наступному.

Нехай задані числа $N>0,\ S>1,\ \delta>0,\ 0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, $C_0>0,\ 0<\gamma<1$.

Поставимо у відповідність точці x допоміжну задачу

$$\min_p \left\{ p^T f_0'(x) + \frac{1}{2} p^T A p :\ p^T f_i'(x) + f_i(x) \le 0,\ i \in J_\delta(x) \right\}, \qquad /2/$$

де A – симетрична додатно визначена матриця,

$$J_\delta(x) = \left\{ i : f_i(x) \ge F(x) - \delta \right\},\quad F(x) = \max\left\{0, f_1(x), \dots, f_m(x)\right\}.$$

Розв"язок задачі /2/ і її множники Лагранжа позначаємо відповідно через $p(x)$ і $u^i(x)$, $i \in J_\delta(x)$.

Нехай I_n - одинична матриця порядку n,

$$\Phi_N(x) = f_0(x) + NF(x), \quad \mathcal{L}(x,u) = f_0(x) + \sum_{i \in J_\delta(x)} u^i f_i(x).$$

Опишемо загальний крок алгоритму. Припустимо, що точка x_k, матриця A_k і число C_k уже побудовані.

1. Розв"язуючи задачу /2/ при $x = x_k$, $A = A_k$, обчислити $p_k = p(x_k)$, $u_k^i = u^i(x_k)$, $i \in J_\delta(x_k)$.

2. Якщо $\|p_k\| > C_k$ або $\Phi_N(x_k + p_k) > \Phi_N(x_0)$, то прийняти $C_{k+1} = C_k$ і перейти до кроку 3. Інакше прийняти $x_{k+1} = x_k + p_k$, $C_{k+1} = \gamma \|p_k\|$ і перейти до кроку 4.

3. Починаючи з $\alpha = 1$, дробити α шляхом поділу навпіл до першого виконання нерівності

$$\Phi_N(x_k + \alpha p_k) \le \Phi_N(x_k) - \alpha \varepsilon p_k^T A_k p_k .$$

Прийняти $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$.

4. Перерахувати матрицю $\bar{A}_{k+1} = A_k + B_k$, де B_k - симетрична матриця малого рангу, яка визначає конкретний тип квазіньютонівського перерахунку [3].

5. З допомогою модифікованого LDL^T - розкладу Холеського [3] побудувати додатно визначену матрицю

$$A_{k+1} = L_{k+1} D_{k+1} L_{k+1}^T = \bar{A}_{k+1} + E_{k+1},$$

де L_{k+1}, D_{k+1} - фактори Холеського [3], а E_{k+1} - діагональна матриця, яка дорівнює нульовій, якщо матриця $\bar{A}_{k+1}$ суттєво додатно визначена.

6. Коли $\max_i a_{k+1}^i / \min_i d_{k+1}^i < S$, то перейти до кроку 1 (a_{k+1}^i, d_{k+1}^i - i-ті діагональні елементи матриць A_{k+1} і D_{k+1}). Інакше прийняти $A_{k+1} = I_n$ і перейти до кроку 1.

<u>Теорема 1</u>. Нехай виконуються умови:

1/ множина $\Omega = \{x : \Phi_N(x) \le \Phi_N(x_0)\}$ компактна;

2/ градієнти функцій $f_i(x)$, $i = \overline{0,m}$ в Ω задовольняють умову Ліпшиця;

3/ існує розв"язок задачі /2/ при довільному $x \in \Omega$, причому $\sum_{i \in J_\delta(x)} u^i(x) \le N$.

Тоді в довільній граничній точці послідовності $\{x_k\}$ задовольняються необхідні умови екстремума для задачі /1/.

Нехай $f_i(x) \in C^2(\Omega)$, $i=\overline{0,m}$ і розв"язок x_* задачі /1/ є единою точкою з Ω, в якій виконуються необхідні умови екстремуму для задачі /1/. Припустимо, що

а/ градієнти $f_i'(x)$, $i \in J_* = \{i : f_i(x_*) = 0\}$ лінійно незалежні;

б/ $u_*^i = u^i(x_*) > 0$, $i \in J_*$;

в/ $p^T \mathcal{L}_{xx}''(x_*, u_*) p > 0$, де $p \in P_* = \{p \neq 0 : p^T f_i'(x_*) = 0, i \in J_*\}$, причому матриця $\mathcal{L}_{xx}''(x_*, u_*)$ невироджена.

Теорема 2. Нехай виконані умови 1-3, а-в і

$$\| [A_k - \mathcal{L}_{xx}''(x_*, u_*)] p_k \| / \| p_k \| \to 0 \quad \text{при } k \to \infty . \qquad /3/$$

Тоді $x_k \to x_*$ при $k \to \infty$ з надлінійною швидкістю.

Цікавим наслідком теореми 2 є те, що можливо отримати надлінійну швидкість збіжності алгоритму навіть тоді, коли збіжність матриць A_k до $\mathcal{L}_{xx}''(x_*, u_*)$ відсутня.

Виясним, в яких випадках можна гарантувати виконання умови /3/.

Нехай на кроці 4 алгоритму для перерахунку матриці $\bar{A}_{k+1}$ використовується формула Девідона-Флетчера-Пауелла [1].

Лема. Нехай виконані умови 1-3, а-в. Тоді, починаючи з деякого $\bar{k}$, $z^T \bar{A}_k z > 0$, $z \in R^n$, $k \geq \bar{k}$.

Теорема 3. Нехай виконані умови 1-3, а-в і

$$r \|p\|^2 \leq p^T \mathcal{L}_{xx}''(x_*, u_*) p \leq R \|p\|^2, \quad p \in P_*, \quad R \geq r > 0;$$

$$\mathcal{L}_x'(x,u) \neq \mathcal{L}_x'(\bar{x}, u), \quad x, \bar{x} \in \Omega, \quad x \neq \bar{x};$$

$$z^T \bar{A}_k z \geq a \|z\|^2, \quad z \in R^n, \quad a > 0, \quad k \geq \bar{k}.$$

Тоді при достатньо великому S $x_k \to x_*$ з надлінійною швидкістю.

У формулюванні теореми 3 збережена умова на роботу самого алгоритму: $z^T \bar{A}_k z \geq a \|z\|^2$, $k \geq \bar{k}$. З огляду на лему дещо слабша умова $z^T \bar{A}_k z > 0$ виконується завжди.

Відзначимо, що під час практичної реалізації алгоритму доцільно замість обчислення матриці A_k з наступним розкладом Холеського /порядку n^3 операцій/ безпосередньо перераховувати її фактори Холеського L_k і D_k /порядку n^2 операцій/ [2]. При цьому залишаються справедливими теореми 1-3.

1. Г и л л Ф., М ю р р е й У., Р а й т М. Практическая оптимизация. М., 1985. 2. Г о л у б Б.М. Одна схема побудови квазіньютонівських алгоритмів для безумовної мінімізації функції // У цьому ж Віснику. 3. Щ е р б и н а Ю.Н., Г о л у б Б.М. Квазиньютоновские модификации метода линеаризации / Львов, 1986. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 1396 - Ук86. 4. Щ е р б и н а Ю.М., Г о л у б Б.М. Квазіньютонівська модифікація методу лінеаризації з використанням LDL^T -розкладу Холеського //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1988. Вип.29. С.5-8.

Стаття надійшла до редколегії 15.03.88

УДК 519.6

Б.М. Голуб

ОДНА СХЕМА ПОБУДОВИ КВАЗІНЬЮТОНІВСЬКИХ АЛГОРИТМІВ ДЛЯ БЕЗУМОВНОЇ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЇ

Розглянемо задачу безумовної мінімізації

$$\min f(x), \quad x \in R^n, \qquad /1/$$

де $f(x)$ - неперервно диференційована функція; R^n - n -мірний евклідів простір.

Більшість відомих ітераційних методів розв"язування задачі /1/ можна зобразити у вигляді

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k, \qquad /2/$$

де вектор p_k є напрямком спуску; α_k - додатний кроковий множник.

Позначимо $f'_k = f'(x_k)$, $S_k = x_{k+1} - x_k$, $y_k = f'_{k+1} - f'_k$. Нехай

$$p_k = -A_k^{-1} f'_k, \qquad /3/$$

де A_k - симетрична додатно визначена матриця така, що

$$A_k S_{k-1} = y_{k-1}. \qquad /4/$$

Схема /2/ - /4/ представляє клас квазіньютонівських методів з прямою апроксимацією гесіана функції $f(x)$. Для перерахунку матриць A_k, що задовольняють квазіньютонівську умову /4/, запропоновано багато формул*. Зокрема, однією з найбільш поширених є БФГШ-формула

$$A_{k+1} = A_k + y_k y_k^T / y_k^T S_k - A_k S_k S_k^T A_k / S_k^T A_k S_k, \qquad /5/$$

* Г и л л Ф., М ю р р е й У., Р а й т М. Практическая оптимизация. М., 1985.