УДК 518:517.9

М.В.Жук

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА ДЛЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ У ВИПАДКУ ОБЛАСТІ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИДУ

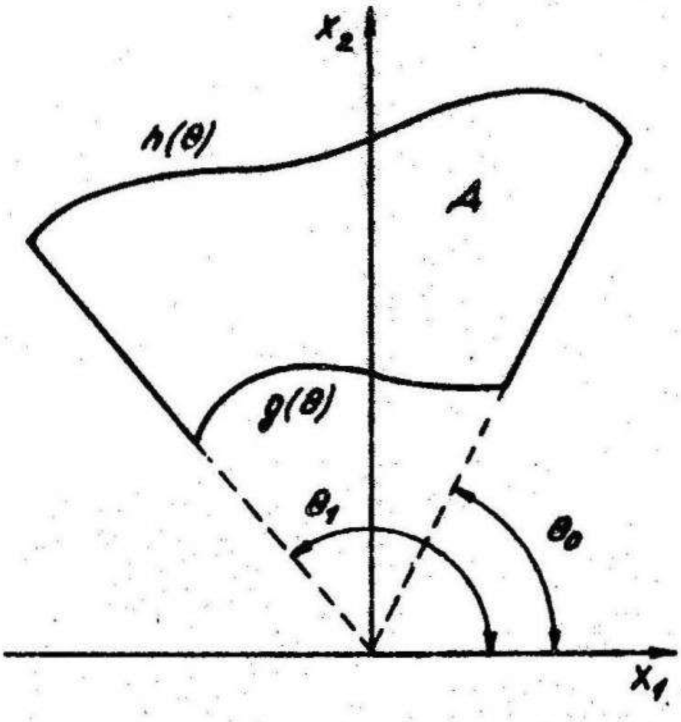
Розглянемо рівняння

$$Lu = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+p(x_1,x_2)u=f(x_1,x_2),\quad p_{ij}=p_{ji} \qquad /1/$$

при однорідній крайовій умові задачі Діріхле

$$u\big|_{\Gamma}=0, \qquad /2/$$

де Γ - межа області D складається з двох прямолінійних відрізків, з яких принаймні один непаралельний осі x_2 /див. рисунок/.



Оператор L розглядаємо в просторі $H=L_2(D)$ з нормою $\|u\|^2=\iint\limits_D u^2(x_1,x_2)\,dx_1dx_2$.

За область визначення $D(L)$ оператора L приймаємо множину двічі неперервно диференційованих функцій $u(x_1,x_2)$ в області $\bar{D}=D+\Gamma$, які задовольняють умову /2/.

Вважаємо, що оператор L задовольняє умову рівномірної еліптичності:

$$\mu_1(\xi_1^2+\xi_2^2) < \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p_{ij}\xi_i\xi_j \le \eta_1(\xi_1^2+\xi_2^2), \qquad /3/$$

де, μ_1 і $\eta_1 = const > 0$; ξ_1 , ξ_2 - довільні числа; (x_1, x_2) - довільна точка з $\bar{D}$.

Крім того, припускаємо, що функція $p(x_1, x_2)$ обмежена, тобто $\alpha \le p(x_1, x_2) \le \beta$, і при цьому виконується умова $\mu > 0$, де

$$\mu = \begin{cases} \mu_1 , & \text{якщо } \alpha \ge 0, \\ \mu_1 + \alpha \varkappa , & \text{якщо } \alpha < 0. \end{cases} \qquad /4/$$

У співвідношенні /4/ $\varkappa > 0$ - постійна нерівності Фрідріхса [3] .

Введемо простір Соболева $\overset{o}{W}{}_2^1(D)$ функцій $u(x_1, x_2)$, які мають перші узагальнені похідні сумовані з квадратом і які задовольняють умову /2/. Норма у $\overset{o}{W}{}_2^1(D)$ визначається формулою

$$|u|_0^2 = \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right] dx_1 dx_2 . \qquad /5/$$

Відзначимо, що простір $\overset{o}{W}{}_2^1(D)$ є енергетичним простором додатно визначеного оператора $Tu = -\Delta u$, що розглядається в H при $D(T) = D(L)$, а /5/ його енергетична норма.

При цьому

$$\|u\| \le \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} |u|_0$$

для довільного $u \in \overset{o}{W}{}_2^1(D)$ [3] .

Для довільних $u, v \in \overset{o}{W}{}_2^1(D)$ формально введемо білінійну форму

$$L(u,v) = \iint\limits_D \left[\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p_{ij}(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + p(x_1,x_2)uv\right] dx_1 dx_2 . \qquad /6/$$

При цьому, як випливає з /3/ і /4/, для довільного $u \in \overset{o}{W}{}_2^1(D)$ виконується

$$\mu |u|_0^2 \le L(u,u) \le \eta |u|_0^2 , \qquad /7/$$

де

$$\eta = \begin{cases} \eta_1 + \beta\varkappa , & \text{якщо } \beta \ge 0, \\ \eta_1 , & \text{якщо } \beta \le 0. \end{cases}$$

Узагальненим розв"язком задачі /1/ - /2/ називається функція $u \in \overset{o}{W}{}_2^1$, для якої виконується тотожність

$$L(u,v) = \iint\limits_{D} f \cdot v \, dx_1 dx_2 \qquad /8/$$

при довільній функції $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$.

Перейдемо до полярної системи координат $x_1 = \rho\cos\theta$, $x_2 = \rho\sin\theta$, в якій межа області D описується прямими $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_1$ і достатньо гладкими кривими $\rho = g(\theta)$, $\rho = h(\theta)$, при цьому $g(\theta) < h(\theta)$ для $\theta_0 \le \theta \le \theta_1$, тобто область D перетворюється в область

$$D_1 : \begin{cases} \theta_0 \le \theta \le \theta_1 \\ g(\theta) \le \rho < h(\theta) \end{cases}.$$

Оскільки перетворення змінних (x_1, x_2) на (ρ, θ) таке, що область D біоднозначно перетворюється в область D_1, причому перетворення в обидві сторони здійснюється функціями, неперервно диференційованими у відповідних замкнутих областях зміни (x_1, x_2) і (ρ, θ), то властивості функцій і операторів в полярних координатах зберігаються. Зауважимо, що при цьому простір $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ переходить в простір $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D_1)$ з нормою

$$|u|_0^2 = \iint\limits_{D_1} \left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2\right] d\rho\, d\theta,$$

а задача /1/ записується у вигляді

$$Lu \equiv -\frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i'}\left(\rho_{ij}'\frac{\partial u}{\partial x_j'}\right) + \rho u = f,$$

$$\rho_{ij}' = \rho\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}\rho_{rs}\frac{\partial x_i'}{\partial x_r}\frac{\partial x_j'}{\partial x_s}, \quad \rho = x_1', \; \theta = x_2'.$$

Наближений розв"язок задачі /1/ - /2/, згідно з методом Канторовича, шукаємо у вигляді

$$u_n(\rho,\theta) = \sum_{k=1}^{n} C_k(\theta)\,\varphi_k(\rho,\theta), \qquad /9/$$

де лінійно незалежні у проміжку $[g(\theta),\ h(\theta)]$ функції $\varphi_k(\rho,\theta)$ задовольняють умови

$$\varphi_k(\rho,\theta)\Big|_{\rho=g(\theta)} = \varphi_k(\rho,\theta)\Big|_{\rho=h(\theta)} = 0, \quad k=1,2,\ldots \qquad /10/$$

Їх вибираємо такими, щоб система функцій $\{\mathcal{X}_\ell(\theta)\varphi_k(\rho,\theta)\}\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_1)$ була повною системою лінійно незалежних функцій в просторі $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D_1)$, при цьому функції системи $\{\mathcal{X}_\ell(\theta)\}$ задовольняють умови

$$\mathcal{X}_\ell(\theta)\Big|_{\theta=\theta_0} = \mathcal{X}_\ell(\theta)\Big|_{\theta=\theta_1} = 0, \quad \ell=1,2,\ldots \qquad /11/$$

Невідомі коефіцієнти $C_k(\theta)$ визначаємо з системи

$$\int_{g(\theta)}^{h(\theta)} \rho(Lu_n - f)\varphi_i(\rho,\theta)\,d\rho = 0, \quad i=1,2,\ldots,n, \qquad /12/$$

$$C_k(\theta)\Big|_{\theta=\theta_0} = C_k(\theta)\Big|_{\theta=\theta_1} = 0, \quad k=1,2,\ldots,n. \qquad /13/$$

Позначимо через $H_n \subset H$ простір функцій вигляду $u_n(\rho,\theta) = \sum_{k=1}^{n} a_k(\theta)\,\varphi_k(\rho,\theta)$. Нехай для деякої функції $u_n(\rho,\theta)\in H_n \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_1)$ справедлива тотожність

$$L(u_n, v_n) = \iint_{D_1} \rho f(\rho,\theta) v_n(\rho,\theta)\,d\rho\, d\theta,$$

в якій $v_n(\rho,\theta)$ довільна функція з $H_n \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_1)$.
Тоді функція $u_n(\rho,\theta)$ називається узагальненим розв"язком системи методу Канторовича /11/ - /12/.

Аналогічно, як і в праці [2], можна довести наступну теорему.

<u>Теорема</u>. Якщо виконуються умови /7/, то для довільної функції $f\in H$ задача /1/ - /2/ має єдиний узагальнений розв"язок $u\in \overset{\circ}{W}{}_2^1$; при довільному n для системи методу Канторовича /12/ - /13/ існує єдиний узагальнений розв"язок $u_n(\rho,\theta)\in$ $\in H_n \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_1)$, метод Канторовича збігається і швидкість збіжності характеризується оцінкою

$$|u-u_n|_0 \le C\,|u-v_n|_0, \qquad /14/$$

де $C=\sqrt{\frac{\eta}{\mu}}$; елемент $v_n = \sum_{k=1}^{n} a_k(\theta)\varphi_k(\rho,\theta)\in H_n \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_1)$ вибираємо таким, щоб реалізувався мінімум функціоналу $|u-v_n|_0$.

Якщо координатну систему функцій $\{\varphi_k(\rho,\theta)\}$ взяти в одному з вигляді

$$\tilde{\varphi}_k(\rho,\theta)=\sin\frac{k\pi(\rho-g(\theta))}{h(\theta)-g(\theta)},\quad \tilde{\varphi}_k(\rho,\theta)=\rho^{k-1}(\rho-g(\theta))(\rho-h(\theta)),$$ /15/

то за умови неперервності перших похідних узагальненого розв"язку вихідної задачі та існування других похідних $\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}$, сумованих з квадратом, справедлива оцінка

$$|u-u_n|_0=O\left(\frac{1}{n}\right).$$ /16/

Накладаючи умови на похідні більш високого порядку, можна отримати більш високий порядок малості [1].

1. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М., 1962. 2. Лучка А.Ю., Жук М.В. Исследование быстроты сходимости метода Канторовича для линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа //Методы количественного и качественного исследования дифференциальных и интегральных уравнений. К., 1975. С.84-98. 3. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., 1970.

Стаття надійшла до редколегії 15.03.88

УДК 518:517.948

Л.Л.Роман

ПРО ЕФЕКТИВНІСТЬ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ТИПУ НЬЮТОНА-КАНТОРОВИЧА ДЛЯ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Дослідимо ефективність застосування методів Ньютона-Канторовича [5] зі швидкістю збіжності $1+\sqrt{2}$ [1], їх рекурсивних процесів [3,4], також $(N+1)$ - точкового послідовного методу січних [6], методу [2,7] для розв"язування крайової задачі системи нелінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),$$ /1/

$$g(x_0,x_\ell)=d,$$ /2/

де $x(t), f(t,x), g(x_0,x_\ell)$ - вектор-функції розмірності N від вказаних аргументів; d - заданий вектор; $x_0=x(0)$, $x_\ell=x(\ell)$