$$\tilde{\varphi}_k(\rho,\theta)=\sin\frac{k\pi(\rho-g(\theta))}{h(\theta)-g(\theta)},\quad \tilde{\varphi}_k(\rho,\theta)=\rho^{k-1}(\rho-g(\theta))(\rho-h(\theta)),$$ /15/

то за умови неперервності перших похідних узагальненого розв"язку вихідної задачі та існування других похідних $\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}$, сумованих з квадратом, справедлива оцінка

$$|u-u_n|_0 = O\left(\frac{1}{n}\right).$$ /16/

Накладаючи умови на похідні більш високого порядку, можна отримати більш високий порядок малості [1].

1. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М., 1962. 2. Лучка А.Ю., Жук М.В. Исследование быстроты сходимости метода Канторовича для линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа //Методы количественного и качественного исследования дифференциальных и интегральных уравнений. К., 1975. С.84-98. 3. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., 1970.

Стаття надійшла до редколегії 15.03.88

УДК 518:517.948

Л.Л.Роман

ПРО ЕФЕКТИВНІСТЬ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ТИПУ НЬЮТОНА-КАНТОРОВИЧА ДЛЯ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Дослідимо ефективність застосування методів Ньютона-Канторовича [5] зі швидкістю збіжності $1+\sqrt{2}$ [1], їх рекурсивних процесів [3,4], також $(N+1)$ - точкового послідовного методу січних [6], методу [2,7] для розв"язування крайової задачі системи нелінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),$$ /1/

$$g(x_0,x_\ell)=d,$$ /2/

де $x(t), f(t,x), g(x_0,x_\ell)$ - вектор-функції розмірності N від вказаних аргументів; d - заданий вектор; $x_0=x(0)$, $x_\ell=x(\ell)$

Уважатимемо ефективнішим той алгоритм, при використанні якого одержуємо розв"язок задачі з бажаною точністю, виконавши при цьому найменше число операцій. В [1] запропоновано визначати ефективність одного методу відносно іншого з допомогою формули

$$Q_1 / Q_2 < \log_{\tau_2} \tau_1 , \qquad /3/$$

де Q_1, Q_2 - кількість обчислень, необхідних для проведення одної ітерації; τ_1, τ_2 - порядок збіжності відповідно першого та другого методів.

Використовуючи методи пристрілки, розв"язування задачі /1/, /2/ зведемо до послідовного розв"язування двох задач: системи нелінійних рівнянь виду

$$q(x(0,X_\tau),\ x(\ell, X_\tau)) = d \qquad /4/$$

і задачі Коші для системи /1/ при початковій умові

$$x(\tau) = X_\tau , \qquad /5/$$

де $0 \leqslant \tau \leqslant \ell$; X_τ - розв"язок /4/.

Застосування досліджуваних методів для розв"язування системи /4/ вимагає на кожному кроці розв"язувати певну кількість задач Коші, причому інші обчислювальні затрати порівняно з обсягом обчислень, необхідним для розв"язування задач Коші, незначні. У зв"язку з цим доцільно мати критерій ефективності методів, більше пристосований до специфіки крайових задач.

Розглянемо два методи з порядком збіжності τ_1 , τ_2 . Нехай перший метод вимагає для проведення однієї ітерації виконання $Q_1 = K_1 M_f$ обчислень, а другий $Q_2 = K_2 M_f$, де K_1, K_2 - кількість задач Коші відповідно для першого і другого методів; M_f - кількість обчислювальних операцій, необхідних для розв"язування однієї задачі Коші. Метод з порядком збіжності τ_1 ефективніший від методу τ_2 , коли згідно з /3/

$$K_1 M_f / K_2 M_f < \log_{\tau_2} \tau_1 , \quad \text{звідки} \quad K_1 / K_2 < \log_{\tau_2} \tau_1$$

Останню нерівність перепишемо у вигляді

$$\tau_1 > \tau_2^{K_1/K_2} \quad \text{або} \quad \sqrt[K_1]{\tau_1} > \sqrt[K_2]{\tau_2} .$$

Позначимо $J_1 = \sqrt[K_1]{\tau_1}$, $J_2 = \sqrt[K_2]{\tau_2}$. Ми побачили, що метод з порядком збіжності τ_1 ефективніший від методу з порядком збіжності τ_2 , коли $J_1 > J_2$. Таким чином, індекс ефективності методу при розв"язуванні крайових задач визначаємо за формулою

$$J = \sqrt[K]{\tau}\ , \qquad /6/$$

де τ – порядок збіжності досліджуваного методу; K – кількість задач Коші, необхідних для проведення однієї ітерації.

Застосування різницевих аналогів методів Ньютона-Канторовича зі швидкістю збіжності $1 + \sqrt{2}$ вимагає розв"язувати на кожному кроці N +1 задачу Коші, де N – розмірність системи /4/. Індекси ефективності відповідно $J_N = \sqrt[N+1]{2}$, $J_{1+\sqrt{2}} = \sqrt[N+1]{1+\sqrt{2}}$. Використовуючи рекурсивні процеси методів Ньютона-Канторовича [4] зі швидкістю збіжності $1 + \sqrt{2}$ [3], на кожному кроці розв"язуєм $N+p$ задач Коші, де p – оптимальна глибина рекурсії. Індекси ефективності $J_{pH} = \sqrt[N+p_1]{p_1+1}$, $J_{p_1+\sqrt{2}} = \sqrt[N+p_2]{p}$, де p_1 – найближче ціле число до розв"язку рівняння

$$\ln(p+1) = 1+(N-1)/(p+1), \qquad /7/$$

p_2 – визначається аналогічно із рівняння

$$\ln\left((p+1+\sqrt{p^2+2p+5})/2\right) = (N+p)/\sqrt{p^2+2p+5},$$

$$p = \left(p_2+1+\sqrt{p_2^2+2p_2+5}\right)/2. \qquad /8/$$

Для побудови розв"язку системи /4/ /N +1/ – точковим послідовним методом січних [6] необхідно розв"язувати на кожному кроці, крім першого, одну задачу Коші, методом із праць [2,7] – дві задачі Коші. Індекси ефективності $J_{[6]} = \tau$, $J_{[2,7]} = \sqrt{p}$, де τ, p – порядки збіжності методів із праць [6], [2,7].

Залежність індексів ефективності досліджуваних методів від розмірності N- системи /4/ дає змогу апріорі визначити ефективний алгоритм розв"язку задачі /1/, /2/, побудувати пріоритетну /в сенсі кількості обчислень/ схему використання даних методів. Пріоритетна схема використання досліджуваних методів при розв"язуванні крайових задач така: /N +1/ – точковий послідовний метод січних [6] і метод із праць [2,7], рекурсивні ітераційні процеси [3,4], метод зі швидкістю збіжності $1 + \sqrt{2}$ [1], метод Ньютона-Канторовича [5].

Необхідно зазначити, що дослідження ефективності методів [2,6,7] проводили в припущенні, що початкова матриця A_0 будується дуже близькою до різницевого аналогу матриці Якобі. Будуючи A_0 довільним чином, наведені алгоритми дещо програють в ефективності.

Для перевірки одержаних результатів методи типу Ньютона-Канторовича застосовували для розв"язування ряду задач механіки, задач оптимального керування на швидкодію. У всіх алгоритмах початкове наближення, різницеві матриці на першій ітерації, точність обчислень вибирали одні і ті ж. Крім того, в методах праць [2,6,7] початкова матриця A_0 була близькою до різницевої матриці Якобі. При практичній реалізації методів на ЕОМ висновки про ефективність методів робились як за загальною кількістю розв"язаних задач Коші, необхідних для одержання розв"язку з заданою точністю, так і часом реалізації їх на ЕОМ.

Одержані результати підтвердили апріорні теоретичні дослідження. Зокрема, якщо прийняти час розв"язку задачі методом Ньютона-Канторовича за 100 %, то методом зі швидкістю збіжності $1+\sqrt{2}$ необхідно 80 %, методом із праць [7] - 70 %, рекурсивним методом [3,4] і методом із праці [6] - 67 % часу.

1. Бартіш М.Я. Про один ітераційний метод розв"язування функціональних рівнянь //Доп. АН УРСР. Сер.А. 1968. № 5. С.387-391. 2. Бартіш М.Я. Про один метод розв"язування систем нелінійних алгебраїчних рівнянь з надлінійною швидкістю збіжності // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1985. Вип.23. С.3-6. 3. Бартіш М.Я., Роман Л.Л. Про один рекурсивний метод розв"язування нелінійних функціональних рівнянь //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1987. Вип.26. С.3-7. 4. Бартиш М.Я., Щербина Ю.Н. Итерационные формулы, получаемые с помощью рекурсии // Мат. сб. К., 1976. С.50-53. 5. Канторович Л.В. О методе Ньютона //Тр.мат. ин-та им. Стеклова. 1949. № 28. С.104-144. 6. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М., 1975. 7. Роман Л.Л. О модификации итерационного процесса со скоростью сходимости $1+\sqrt{2}$ //Тез. докл.III симпозиума "Методы решения налинейных уравнений и задач оптимизации". Таллин. 1984. С.90-91.

Стаття надійшла до редколегії 22.03.88