УДК 519.21

І.Д.Квіт

ТАНТИЛЬ

1. Тантиль випадкової змінної. Нехай абсолютно неперервна додатна випадкова змінна ξ з функцією розподілу ймовірностей $\mathcal{F}(t)$ і густиною $p(t)=\mathcal{F}'(t)$ має обмежене сподівання

$$E\xi=\int_0^\infty t\,p(t)\,dt=\int_0^\infty[1-\mathcal{F}(t)]\,dt.$$

Тантилем порядку ω додатної випадкової змінної ξ з густиною $p(t)$ називається розв"язок τ_ω рівняння

$$\int_0^{\tau_\omega} t\,p(t)\,dt=\omega\int_{\tau_\omega}^\infty t\,p(t)\,dt,\quad \omega>0. \tag{1}$$

Оскільки, інтегруючи частинами,

$$\int_0^{\tau_\omega} t\,p(t)\,dt=\int_0^{\tau_\omega}[\mathcal{F}(\tau_\omega)-\mathcal{F}(t)]\,dt, \tag{2}$$

і права частина тотожності /2/ є площею, обмеженою віссю ординат, прямою на висоті $\mathcal{F}(\tau_\omega)$ і графіком функції розподілу $\mathcal{F}(t)$ на відрізку $[0,\tau_\omega]$, то числове значення лівої частини рівняння /1/ дорівнює тій же площі. Аналогічно, інтегруючи частинами

$$\int_{\tau_\omega}^\infty t\,p(t)\,dt=\tau_\omega[1-\mathcal{F}(\tau_\omega)]+\int_{\tau_\omega}^\infty[1-\mathcal{F}(t)]\,dt, \tag{3}$$

дістаємо, що ліва частина тотожності /3/ чисельно дорівнює площі, обмеженій віссю ординат, прямими на висоті 1 і $\mathcal{F}(\tau_\omega)$ та графіком функції розподілу $\mathcal{F}(t)$ на промені $[\tau_\omega,\infty]$. Записуючи рівність /1/ у вигляді

$$\frac{\int_0^{\tau_\omega} t\,p(t)\,dt}{\int_{\tau_\omega}^\infty t\,p(t)\,dt}=\omega:1,\quad \omega>0, \tag{4}$$

приходимо до висновку, що пряма на висоті $\mathcal{F}(\tau_\omega)$ ділить площу, обмежену віссю ординат, прямою на висоті 1 та графіком функції розподілу $\mathcal{F}(t)$ на дві частини, нижню та верхню, в пропорції $\omega:1$. Наприклад, при $\omega=\frac{1}{9}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$, 1, 2, 3, 4, 9 пряма на висоті $\mathcal{F}(\tau_\omega)$ ділить площу математичного сподівання на нижню та верхню частини відповідно в пропорції 1:9, 1:4, 1:3, 1:2, 1:1, 2:1, 3:1, 4:1, 9:1. Зокрема, перший децильний тантиль $\tau_{\frac{1}{9}}$ ділить сподівання в пропорції 1:9; перший квартильний тантиль $\tau_{\frac{1}{3}}$ ділить сподівання в пропорції 1:3; медіанний тантиль τ_1 ділить сподівання на дві рівні частини; третій квартильний тантиль τ_3 ділить сподівання в пропорції 3:1; дев"ятий децильний тантиль τ_9 ділить сподівання в пропорції 9:1.

<u>Приклад</u>. **Тантиль випадкової змінної Вейбула.** Нехай

$$p(t)=\frac{\nu}{\sigma^\nu}t^{\nu-1}e^{-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\nu},\quad t>0,\ (\sigma>0,\ \nu>0).$$

Тоді рівняння /1/ набуває вигляду

$$\gamma\left(\frac{1}{\nu}+1,\left(\frac{\tau_\omega}{\sigma}\right)^\nu\right)=\omega\Gamma\left(\frac{1}{\nu}+1,\left(\frac{\tau_\omega}{\sigma}\right)^\nu\right),\quad \omega>0, \qquad /5/$$

де неповні гама-функції

$$\gamma(a,t)=\int_0^t e^{-x}x^{a-1}dx;\quad \Gamma(a,t)=\int_t^\infty e^{-x}x^{a-1}dx;\ a>0.$$

Зокрема, при ν = 1 рівняння /5/ переходить у рівняння для тантилів експонентної змінної

$$e^{\frac{\tau_\omega}{\sigma}}=(\omega+1)\left(\frac{\tau_\omega}{\sigma}+1\right),\quad \omega>0. \qquad /6/$$

Звідси, наприклад, для σ = 10000 маємо:

$\tau_{\frac{1}{9}}$ = 5315	$\tau_{\frac{1}{4}}$ = 8245	$\tau_{\frac{1}{3}}$ = 9610
$\tau_{\frac{1}{2}}$ = 11900	τ_1 = 16780	τ_2 = 22900
τ_3 = 26925	τ_4 = 29940	τ_9 = 38900

2. **Тантиль варіаційного ряду.** Нехай

$$x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n \qquad /7/$$

варіаційний ряд незалежних спостережень над абсолютно неперервною додатною випадковою змінною ξ . **Тантилем** τ_ω порядку ω варіаційного ряду /7/ називається елемент x_j , який задовольняє систему нерівностей*

$$\left.\begin{aligned} x_1 + \ldots + x_{j-1} &< \omega(x_j + \ldots + x_n) \\ x_1 + \ldots + x_j &> \omega(x_{j+1} + \ldots + x_n) \end{aligned}\right\},\ \omega>0. \qquad /8/$$

При $\omega = \frac{1}{9}, \frac{1}{3}$, 1, 3 і 9 маємо відповідно перший децильний тантиль, перший квартильний тантиль, медіанний тантиль, третій квартильний тантиль і дев"ятий децильний тантиль. Наприклад, коли варіаційний ряд /7/ представляє собою напрацювання до відмови n однотипних технічних одиниць, то сумарне напрацювання одиниць, які відмовили до моменту τ_1 , де τ_1 – медіанний тантиль, наближено дорівнює сумарному напрацюванню технічних одиниць, що відмовили після моменту τ_1 .

Приклад. Знайти медіанний тантиль варіаційного ряду 21 37 51 64 77 90 103 118 134 152 176 205 256

Оскільки

$$\left.\begin{aligned} 21 + \ldots + 134 = 695 &< 152 + \ldots + 256 = 789 \\ 21 + \ldots + 152 = 847 &> 176 + \ldots + 256 = 637 \end{aligned}\right\},$$

то медіанний тантиль даного варіаційного ряду τ_1 = 152.

Зрозуміло, що при розв"язуванні рівняння /1/ або системи нерівностей /8/, як правило, використовується ЕОМ.

Стаття надійшла до редколегії 17.12.87

---

* Джини К. Средние величины. М., 1970.