УДК 539.3

Д.В.Грилицький

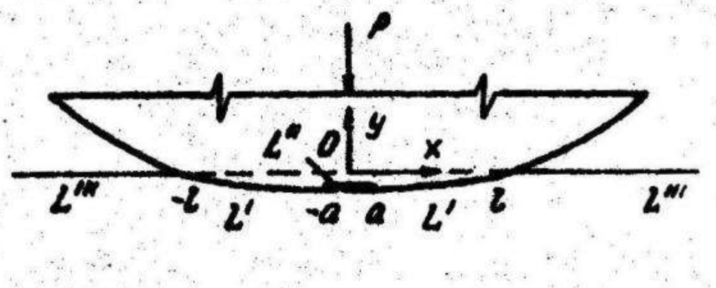
ПРО КОНТАКТНУ ТЕРМОПРУЖНОПЛАСТИЧНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ ПІВПЛОЩИНИ

Л.О.Галін і Г.П.Черепанов вперше поставили і розв"язали контактну пружнопластичну задачу для півплощини, матеріал якої ідеально пружнопластичний і відповідає умові пластичності Треска-Сен-Венана [1].

Ми побудували [2,3] розв"язок цієї задачі для випадку нагрітого штампа, який має прямолінійну горизонтальну основу. При цьому вважалося, що тепловий контакт між співдотичними тілами ідеальний, а границя півплощини зовні ділянки контакту підтримується при нульовій температурі.

У цій статті продовжимо розглядати задачу про тиск нагрітого штампа на півплощину при тих же теплофізичних крайових умовах, що і в працях [2,3]. При цьому припускаємо, що основа штампа обмежена дугою параболи. Цей випадок має самостійне значення. Побудуємо для нього наближений розв"язок.

Припускаючи, що задача має геометричну, силову та теплову симетрію, маємо одну смугу пластичності на границі півплощини під штампом, яка розміститься в центральній частині ділянки контакту симетрично відносно неї /див. рисунок/.



Введемо позначення: L - вся границя півплощини; L' - сукупність відрізків границі півплощини, на яких відома вертикальна компонента вектора пружного переміщення; L'' - смуга пластичності; L''' - границя півплощини зовні ділянки контакту. Очевидно, що $L = L' + L'' + L'''$.

Позначаючи через σ_s границю текучості для ідеального пружнопластичного матеріалу півплощини на стиснення, граничні умови задачі запишемо як

$$\sigma_y(x) = \tau_{xy}(x) = 0; \; T(x) = 0; \; x \in L''';$$

$$\sigma_y(x) = -\sigma_s, \quad x \in L'';$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = f'(x) = \frac{x}{R}, \; x \in L'; \qquad /1/$$

$$\tau_{xy}(x) = 0, \; x \in (L' + L'');$$

$$T = T(x), \; x \in (L' + L''),$$

де $f(x) = \frac{x^2}{2R}$ – рівняння основи штампа; $T(x)$ – температура.

При заданих граничних умовах необхідно визначити: величину ділянки контакту 2ℓ, величину пластичної смуги $2a$, величину і характер розподілу тиску $\sigma_y(x)$ на $L'(-\ell, -a; a, \ell)$.

У праці [3] отримана формула, що встановлює залежність між напруженнями, вертикальним переміщенням і температурою на границі півплощини:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{y=0} = -\frac{\varkappa - 1}{4\mu}\tau_{xy}(x) + \frac{\varkappa + 1}{4\pi\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_y(t)\,dt}{t - x} + \frac{\gamma}{2\pi(\lambda + \mu)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{T(t)\,dt}{t - x}, \qquad /2/$$

$$\gamma = \frac{\alpha_T E}{1 - 2\nu} = \alpha_T (3\lambda + 2\mu)$$ – для плоскої деформації;

$$\gamma = \frac{\alpha_T E}{1 - \nu} = \alpha_T \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu}$$ – для плоского напруженого стану.

Задовольняючи за допомогою /2/ граничні умови /1/, доходимо до такого сингулярного інтегрального рівняння задачі:

$$\int_{L'}(\sigma_y + K_0 T)\frac{dt}{t - x} = \frac{4\pi\mu}{\varkappa + 1}\varphi(x), \quad x \in L' \qquad /3/$$

при умові

$$\mathcal{P} = -\int_{L'}\sigma_y(t)\,dt + 2a\sigma_s, \qquad /4/$$

де

$$K_0 = \frac{2\mu\gamma}{(\varkappa + 1)(\lambda + \mu)}; \quad \varphi(x) = \frac{x}{R} - \frac{\varkappa + 1}{4\pi\mu}\int_{L''}\frac{(K_0 T - \sigma_s)}{t - x}\,dt \qquad /5/$$

Надалі вважатимемо, що температура штампа, а отже, і граничних точок півплощини, що контактують зі штампом, стала та дорівнює T_0. За цієї умови

$$\varphi(x)=\frac{x}{R}-\frac{(\varkappa+1)(K_0T_0-\sigma_s)}{4\pi\mu}\ln\frac{x-a}{x+a} \qquad /6/$$

З допомогою функції

$$W(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'}(\sigma_y+K_0T_0)\frac{dt}{t-z} \qquad /7/$$

рівняння /3/ зводимо до задачі лінійного спряження:

$$W^+(x)+W^-(x)=-\frac{4\mu i}{\varkappa+1}\varphi(x),\ x\in L'. \qquad /8/$$

Наближений розв"язок задачі /8/ в класі обмежених функцій при $z=\pm\ell$ і $z=\pm a$ за умови, що виконується рівність

$$\frac{4\mu}{R(\varkappa+1)}=\frac{4\ell^2+a^2}{4\ell^3}(\sigma_s-K_0T_0), \qquad /9/$$

дається формулою

$$W(z)=-\frac{2\mu i}{\varkappa+1}\left[\frac{z}{R}+\frac{4\ell^3}{\pi R(4\ell^2+a^2)}\ln\frac{z-a}{z+a}-\right.$$

$$\left.-\frac{2\sqrt{z^2-\ell^2}}{R(4\ell^2+a^2)}\left(2\ell^2+z^2-z\sqrt{z^2-a^2}\right)\right]. \qquad /10/$$

На основі /10/ тиск $\sigma_y(x)$ на L' дається формулою

$$\sigma_y(x)=-K_0T_0-\frac{8\mu\sqrt{\ell^2-x^2}}{R(\varkappa+1)(4\ell^2+a^2)}(2\ell^2+x^2-x\sqrt{x^2-a^2},$$

$$x\in(-\ell,-a;\,a,\ell)$$

$$\sigma_y(x)=-\sigma_s,\quad x\in(-a,a). \qquad /11/$$

Лінійні розміри пластичної смуги та контактної ділянки визначаться з умови /9/ та умови на безмежності. А це з використанням залежності /4/ приводить до співвідношення

$$\frac{\mu}{R(\varkappa+1)} = \frac{[P - 2a\sigma_s - 2(\ell - a)K_0T_0](4\ell^2 + a^2)}{\pi[9\ell^4 - (\ell^2 - a^2)^2] - 32a\ell^3}. \qquad /12/$$

Отже, при заданих P, σ_s, T_0, R, механічних і теплофізичних параметрах півплощини, формули /9/, /12/ і /11/ повністю розв"язують поставлену задачу, визначаючи a, ℓ та $\sigma_y(x)$ на $/-\ell,-a\ ;\ a,\ell\ /$.

Зауваження. Формулу для тиску $\sigma_y(x)$ на $/-\ell,-a\ ;\ a,\ell\ /$ можна дещо перетворити, користуючись одним із двох співвідношень /9/ або /12/. Якщо взяти, наприклад, співвідношення /12/ і в отриманому результаті для тиску прийняти, що довжина пластичної смуги дорівнює нулеві, то дістанемо точний розв"язок термопружної задачі про тиск нагрітого штампа на півплощину. Додатково приймаючи $T_0 = 0$, одержимо формулу для тиску під штампом у контактній задачі теорії пружності. Якщо ж скористатися залежністю /9/ і в отриманому результаті для тиску прийняти $x = a$, то, оскільки задача розв"язана наближено, ми не отримаємо очікуваного $\sigma_y(\pm a) = -\sigma_s$ а дістанемо результат, близький до цього, і тим точніший, чим менше a і більше ℓ.

1. Галин Л.А., Черепанов Г.П. Контактная упруго-пластическая задача для пластин //Докл. АН СССР. 1967. Т.177, № 1. С.56-58. 2. Грилицький Д.В. Контактна термо-пружно-пластична задача для півплощини //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1973. Вип. 8. С.112-115. 3. Грилицький Д.В., Попович Б.І. Плоскі контактні задачі термопружності. Львів, 1973.

Стаття надійшла до редколегії 10.01.88