УДК 519.6:517.925

Г.А.Шинкаренко

ПРО ОДНУ МОДИФІКАЦІЮ СХЕМИ НЬЮМАРКА

1. Постановка задачі. Напівдискретизація початково-крайових задач /наприклад, про поширення хвиль у середовищах з внутрішнім тертям/ за просторовими змінними часто приводить до задачі Коші виду

$$Mu''(t)+Du'(t)+Au(t)=f(t),$$

$$u(0)=u_0,\quad u'(0)=v_0\quad t\in(0,T], \qquad /1.1/$$

дані якої характеризуються наступними властивостями:

$$u_0, v_0\in V=\Big\{v\in \mathbb{R}^n \,\Big|\, |v|=\Big(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\Big)^{1/2}<+\infty\Big\};$$

$$f\in L^2(0,T;V);$$

M, D, A – симетричні додатновизначені матриці. /1.2/

Оскільки порядок n системи /1.1/, як правило, досить великий, то для її чисельного розв"язування найчастіше використовують рекурентну схему Ньюмарка [1,2] /або, в іншій термінології, тришарову схему [3] /з параметрами $\beta, \gamma \geq 0$:

$$\{M+\Delta t\gamma D+\Delta t^2\beta A\}u^{j+1}=\Delta t^2 F_j -$$

$$-\{2M+\Delta t(2\gamma-1)D+\Delta t^2(2\beta-\gamma-\tfrac{1}{2})A\}u^j -$$

$$-\{M+\Delta t(\gamma-1)D+\Delta t^2(\beta-\gamma+\tfrac{1}{2})A\}u^{j-1},\quad j=0,1,\dots,N, \qquad /1.3/$$

де u^k – наближене значення розв"язку $u_k=u(t_k)$ задачі /1.1/ у вузлах сітки $t_k=k\Delta t$, $k=0,1,\dots,N$, $N\Delta t=T$,

$$F_k=\beta f(t_{k+1})+(\gamma-2\beta+\tfrac{1}{2})f(t_k)+(\beta-\gamma+\tfrac{1}{2})f(t_{k-1}). \qquad /1.4/$$

Для запуску схеми /1.3/ застосовують спеціальні стартові процедури відшукання u^0 та u^1 , які приводять до порушення балансу енергії та однорідності обчислювального процесу. Ми поставили собі за мету усунути вказаний недолік за рахунок вибору кусково-квадратичної апроксимації $u_{\Delta t}(t)$ розв"язку задачі /1.1/, де значення $u_{\Delta t}(t_j)$, $u'_{\Delta t}(t_j)$ та $u_{\Delta t}(t_{j+1})$ використовують для побудови рекурентних співвідношень на кожному з інтервалів $[t_j, t_{j+1}]$. Така особливість дає змогу застосувати дану апроксимацію як для побудови стартової процедури схеми /1.3/, що точно враховує початкові умови задачі /1.1/, так і для модифікації самої схеми. Врешті, на основі енергетичних міркувань формулюємо достатню умову стійкості такої схеми і знаходимо апріорні оцінки швидкості збіжності наближених розв"язків.

2. <u>Апроксимація</u>. На кожному проміжку $[t_j, t_{j+1}]$ розв"язок задачі /1.3/ наближаємо поліномом

$$u_{\Delta t}(t)=[1-\omega(t)]u^j+\Delta t[\tfrac{1}{2}\Delta t\omega'(t)-\omega(t)]v^j+\omega(t)u^{j+1} \qquad /2.1/$$

з невідомими коефіцієнтами u^j, v^j і u^{j+1} ; тут $\omega(t)=(t-t_j)^2/\Delta t^2$.

Беручи до уваги, що $u_{\Delta t}(t_k)=u^k /k=j,j+1/, u'_{\Delta t}(t_j)=v^j$, приймемо $v^{j+1}=u'_{\Delta t}(t_{j+1})$. Тоді

$$v^{j+1}=-v^j+2(u^{j+1}-u^j)/\Delta t, \quad j=0,1,\ldots \qquad /2.2/$$

З урахуванням /2.2/ апроксимації /2.1/ дають змогу записати на кожному з проміжків $[t_j, t_{j+1}]$ рівняння

$$u_{\Delta t}=u^{j+\frac{1}{2}}+\Delta t(\tfrac{1}{2}\Delta t\omega'-\tfrac{1}{2})v^{j+\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}\Delta t^2(\omega-\tfrac{1}{2}\Delta t\omega')\dot{v}^{j+\frac{1}{2}},$$

$$u'_{\Delta t}=v^{j+\frac{1}{2}}+\Delta t(\tfrac{1}{2}\Delta t\omega'-\tfrac{1}{2})\dot{v}^{j+\frac{1}{2}}, \quad u''_{\Delta t}=\dot{v}^{j+\frac{1}{2}}. \qquad /2.3/$$

Тут і далі використовуємо такі позначення:

$$q^{j+\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}(q^{j+1}+q^j), \quad \dot{q}^{j+\frac{1}{2}}=(q^{j+1}-q^j)/\Delta t,$$

$$q^{j+\gamma}=q^{j+\frac{1}{2}}+\Delta t(\gamma-\tfrac{1}{2})\dot{q}^{j+\frac{1}{2}}. \qquad /2.4/$$

Зауважимо також, що підстановка /2.1/ у початкові умови задачі /1.1/ дає змогу їх точно задовольнити за рахунок вибору

$$u^0=u_0, \quad v^0=v_0. \qquad /2.5/$$

3. <u>Проекційне рівняння</u>. Нехай $\xi\in L^2((t_j, t_{j+1}))$ така, що $(\xi,1)_0=\int_{t_j}^{t_{j+1}}1\cdot\xi(\tau)d\tau\neq 0$. Підставляючи /2.3/ в рівняння задачі /1.1/, вимагаємо, щоб нев"язка цієї підстановки була ортогональна

до $\xi(t)$ в сенсі скалярного добутку простору $L^2((t_j\ ,\ t_{j+1}))$.
Така вимога приводить до рівняння

$$M\dot{v}^{j+\frac{1}{2}}+Dv^{j+\gamma}+A\left[u^{j+\gamma}+\frac{1}{2}\Delta t^2(\beta-\gamma)\dot{v}^{j+\frac{1}{2}}\right]=F_j\ ,\ j=0,1,\ldots, \qquad /3.1/$$

де

$$\gamma=\frac{1}{2}\Delta t\,\frac{(\omega',\xi)_0}{(1,\xi)_0};\quad \beta=\frac{(\omega,\xi)_0}{(1,\xi)_0};\quad F_j=\frac{(f,\xi)_0}{(1,\xi)_0}. \qquad /3.2/$$

На практиці часто достатньо прийняти

$$F_j=\gamma f(t_{j+1})+(1-\gamma)f(t_j). \qquad /3.3/$$

4. Рекурентна схема. Рівняння /3.1/, /2.2/ та /2.5/ утворюють рекурентну схему з параметрами Δt , β та γ для розв"язування задачі Коші /1.1/. Обчислення пар $\varphi^{j+1}=(u^{j+1},\ v^{j+1})$ за допомогою побудованої схеми можна провести за одним з трьох рівносильних алгоритмів:

$$\begin{aligned}Lu^{j+1}&=\Delta t^2F_j+\left\{M+\Delta t\gamma D+\tfrac{1}{2}\Delta t^2(\beta-1)A\right\}u^j+\\&\quad+\Delta t\left\{M+\Delta t(\gamma-\tfrac{1}{2})D+\tfrac{1}{2}\Delta t^2(\beta-\gamma)A\right\}v^j,\\ v^{j+1}&=-v^j+2(u^{j+1}-u^j)/\Delta t,\qquad j=0,1,\ldots\end{aligned} \qquad /4.1/$$

$$\begin{aligned}Lv^{j+\frac{1}{2}}&=\tfrac{1}{2}\Delta t(F_j-Au^j)+\left\{M+\Delta t(\gamma-\tfrac{1}{2})D+\tfrac{1}{2}\Delta t^2(\beta-\gamma)A\right\}v^j,\\ u^{j+1}&=u^j+\Delta t v^{j+\frac{1}{2}},\quad v^{j+1}=2v^{j+\frac{1}{2}}-v^j,\ j=0,1,\ldots\end{aligned} \qquad /4.2/$$

$$\begin{aligned}Lv^{j+1}&=\Delta t(F_j-Au^j)+\left\{M+\Delta t(\gamma-1)D+\tfrac{1}{2}\Delta t^2(\beta-2\gamma)A\right\}v^j\\ u^{j+1}&=u^j+\tfrac{1}{2}\Delta t(v^{j+1}+v^j),\quad j=0,1,\ldots,\end{aligned} \qquad /4.3/$$

де матриця

$$L=M+\Delta t\gamma D+\tfrac{1}{2}\Delta t^2\beta A$$

додатно визначена щонайменше для $\gamma,\ \beta\geq 0$.Зауважимо, що перші з рекурентних рівнянь /4.1/-/4.3/ лише правими частинами відрізняються від рівнянь схеми Ньюмарка /1.3/. Побудована схема розв"язування задачі /1.1/ дає змогу на відміну від схеми /1.3/ проводити обчислення зі змінним кроком Δt .

Використовуючи енергетичний підхід [3] , дослідимо властивості запропонованої схеми.

5. <u>Стійкість</u>. На просторі V визначимо норми

$$\|u\|_A=(Au,u)^{1/2},\ \|u\|_M=(Mu,u)^{1/2},\ \|u\|_D=(Du,u)^{1/2}, \qquad /5.1/$$

а також

$$\|\varphi\|=\left\{\|v\|_M^2+\|u\|_A^2\right\}^{1/2} \qquad \forall\varphi=(u,v)\in V^2 \qquad /5.2/$$

Домножуючи скалярно /3.1/ на $v^{j+\frac{1}{2}}$, після деяких перетворень приходимо до енергетичного рівняння

$$\frac{1}{2\Delta t}\left\{\|\varphi^{j+1}\|^2-\|\varphi^j\|^2\right\}+\|v^{j+\frac{1}{2}}\|_D^2+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\left\{\|v^{j+1}\|_D^2-\|v^j\|_D^2\right\}+\Delta t(\beta-\gamma)\left\{\|v^{j+1}\|_A^2-\|v^j\|_A^2\right\}+$$

$$+\Delta t\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\|v^{j+\frac{1}{2}}\|_A^2=\left(F_j,v^{j+\frac{1}{2}}\right),\ j=0,1,\dots,N. \qquad /5.3/$$

Оскільки знайдеться $C=const>0$, значення якої не залежить від вибору величини Δt , така, що

$$\left(F_j,v^{j+\frac{1}{2}}\right)\leq C|F_j|^2+\frac{1}{2}\|v^{j+\frac{1}{2}}\|_D^2,$$

то останнє рівняння приводить до апріорних оцінок

$$\|\varphi^{j+1}\|^2+\Delta t\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\|v^{j+1}\|_D^2+2\Delta t^2(\beta-\gamma)\|v^{j+1}\|_A^2$$

$$\leq\|\varphi^j\|^2+\Delta t\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\|v^j\|_D^2+2\Delta t^2(\beta-\gamma)\|v^j\|_A^2+2\Delta tC|F_j|^2,\ j=0,1,\dots \qquad /5.4/$$

На основі цього приходимо до висновку, що нерівності

$$\gamma\geq\frac{1}{2}\ ,\ \beta\geq\gamma \qquad /5.5/$$

встановлюють достатні умови стійкості рекурентної схеми /3.1/, /2.2/ та /2.5/ незалежно від вибору кроку інтегрування Δt і при цьому справедливі оцінки /з $\mathcal{K}=const>0$, що не залежить від Δt /

$$\|\varphi^j\|^2+\Delta t(\gamma-\tfrac{1}{2})\|v^j\|_D^2+2\Delta t^2(\beta-\gamma)\|v^j\|_A^2$$

$$\le \mathcal{K}\left\{|u_0|^2+|v_0|^2+T\|f\|^2_{L^\infty(0,T;V)}\right\},\ j=1,\dots,N,\ \mathcal{K}=const>0. \qquad /5.6/$$

Другий та третій рядки /5.3/ показують, що побудована рекурентна схема має додаткову схемну в"язкість при $\gamma>\frac{1}{2}$ та додатковий перенос енергії при $\gamma>\frac{1}{2}$ та $\beta>\gamma$. Перша особливість дає змогу, зокрема, встановити стійкість даної схеми для випадку $D=0$.

6. <u>Збіжність</u>. Похибки апроксимації схеми

$$e^j=u^j-u(j\Delta t),\quad r^j=v^j-u'(j\Delta t) \qquad /6.1/$$

задовольняють рівняння

$$M\dot r^{j+\frac{1}{2}}+Dr^{j+\gamma}+A\left[e^{j+\gamma}+\tfrac{1}{2}\Delta t^2(\beta-\gamma)\dot r^{j+\frac{1}{2}}\right]=R_j,$$

$$r^{j+\frac{1}{2}}-\dot e^{j+\frac{1}{2}}=Q_j,\quad j=0,1,\dots, \qquad /6.2/$$

де

$$R_j=F_j-M\dot v_{j+\frac{1}{2}}-Dv_{j+\gamma}-A\left[u_{j+\gamma}+\tfrac{1}{2}\Delta t^2(\beta-\gamma)\dot v_{j+\frac{1}{2}}\right];$$

$$Q_j=v_{j+\frac{1}{2}}-\dot u_{j+\frac{1}{2}}.$$

Величини з нижніми індексами обчислюють згідно /2.4/ за точними значеннями u_i , $v_i=u'(j\Delta t)$.

Допускаючи, що розв"язок задачі /1.1/ такий, що $u\in C^4(0,T;V)$, розкладемо його в ряд Тейлора в околі точки $t=t_{j+\frac{1}{2}}$ і підставимо в останні рівності. Тоді, використовуючи рівняння задачі /1.1/, зведемо праві частини /6.2/ до вигляду

$$R_j=-\Delta t(\gamma-\tfrac{1}{2})Mu'''(t_{j+\frac{1}{2}})+C_j\Delta t^2,\quad Q_j=\mathcal{K}_j\Delta t^2, \qquad /6.3/$$

де значення констант C_j та $\mathcal{K}_j$ залежить лише від розв"язку u .

На основі енергетичних міркувань п.5 для безумовно стійкої схеми /3.1/, /2.2/, /2.5/ приходимо до апріорних оцінок швидкості збіжності похибок $\varepsilon^j=(e^j, r^j)\in V^2$:

$$\|\varepsilon^j\|^2+\Delta t(\gamma-\tfrac{1}{2})\|r^j\|_D^2+2\Delta t^2(\beta-\gamma)\|r^j\|_A^2 \leq$$

$$\leq \mathcal{K} T\Delta t^2\{(\gamma-\tfrac{1}{2})^2+\Delta t^2\}, \quad j=1,\dots,N, \qquad /6.4/$$

де значення $\mathcal{K}=const>0$ не залежить від вибору Δt, γ та β.

Таким чином, побудована рекурентна схема при виконанні умов /5.5/ має перший порядок збіжності, але вибір

$$\gamma=\frac{1}{2}+C\Delta t, \qquad C=const>0 \qquad /6.5/$$

приводить до порядку збіжності, що дорівнює двом.

Значення параметра β не впливає на величину порядку збіжності наближених розв"язків, тому для спрощення рекурентних обчислень, наприклад за формулами /4.2/, доцільно прийняти $\beta=\gamma$.

7. <u>Висновки та узагальнення</u>. Т е о р е м а. Нехай $u(t)$ – розв"язок задачі Коші /1.1/ з властивостями /1.2/ і при цьому наявне включення $u\in C^4(0,T;V)$, $0<T<+\infty$. Припустимо, також, що послідовності $(u^{j+1}, v^{j+1})\in V^2$ будуються для відшукання наближеного розв"язку цієї задачі за допомогою рекурентної схеми /3.1/, /2.2/, /2.5/ з параметрами β, γ, $j=1,\dots,N=T/\Delta t$.

Тоді при виконанні умов стійкості /5.5/ значення наближених розв"язків (u^j, v^j) збігаються відносно норми простору V до значень точного розв"язку $(u(j\Delta t), (u'(j\Delta t))$ при $\Delta t\to 0$ і при цьому для похибок апроксимації /6.1/ мають місце апріорні оцінки швидкості збіжності /6.4/.

Зауважимо, що запропонований метод дискретизації та його обгрунтування без змін узагальнюється на наступний клас варіаційних задач:

задано $u_0\in V$, $v_0\in H$, $f\in L^2(0,T;H)$;

знайти $u\in L^2(0,T;V)$ такий, що

$$u'\in L^2(0,T;V), \quad u''\in L^2(0,T;H),$$

$$m(u''(t),v)+d(u'(t),v)+a(u(t),v)=m(f(t),v),$$

$$a(u(0)-u_0,v)=0, \quad m(u'(0)-v_0,v)=0 \quad \forall v\in V, \qquad /7.1/$$

де V – щільний підпростір гільбертового простору H, білінійна симетрична неперервна форма m /.,./ /відповідно d /.,./ та a /.,./ / є H -еліптичною /відповідно V -еліптичними/.

Інші підходи до побудови рекурентних схем і методів їх дослідження наведені в [1,4,5].

1. Б а т е К., В и л с о н Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М., 1982. 2. З е н к е в и ч О., М о р г а н К. Конечные элементы и аппроксимация. М., 1986. 3. С а м а р с к и й А.А. Теория разностных схем. М., 1977. 4. Godlewski E., Puech-Raoult A. Equations d'évolution linéaires du second ordre et méthodes multipas // RAIRO / Numer. Anal. 1979. 13. N4. P. 329-355. 5. Zienkiewicz O.C. Finite element method. London. 1977.

Стаття надійшла до редколегії 26.01.88

УДК 539.3

Л.Й.Опщипко

ОПТИМІЗАЦІЯ ФОРМИ КОНСТРУКЦІЇ, ЩО СКЛАДАЄТЬСЯ З ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ

Ставиться задача оптимального проектування за вагою на міцність осесиметричної конструкції, що складається зі сферичної оболонки радіуса R_1, стріли підйому F, товщини h_1, яка спряжена з циліндричною оболонкою радіуса R_2, товщини h_2; довжини ℓ, що, в свою чергу, спряжена з конічною оболонкою довжини ℓ_1, кутом конусності α і товщини h_3 /див. рисунок/.

Конструкція однорідна та знаходиться під рівномірним зовнішнім тиском $q = const$.

Задача оптимального проектування за вагою на міцність полягає в знаходженні

$$\min V(h_1, h_2, h_3, F, \alpha, S_1) = 2R_1 F h_1 + (S_2^2 - S_1^2) h_3 \sin\alpha + 2R_2 \ell h_2 + h_1^3/6 \qquad /1/$$

при обмеженнях

$$\sigma^{сф}_{екв\,max} < [\sigma], \quad \sigma^{цил}_{екв\,max} \leqslant [\sigma], \quad \sigma^{кон}_{екв\,max} \leqslant [\sigma_1],$$

$$F + \ell + (S_2 - S_1)\cos\alpha \leqslant \beta, \quad \beta = const, \qquad /2/$$

$$\sigma_{екв} = \max(\sigma^{\pm}_{екв}), \quad \sigma^{\pm}_{екв} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1^{\pm})^2 + (\sigma_2^{\pm})^2 + (\sigma_1^{\pm} - \sigma_2^{\pm})^2}\,, \qquad /3/$$