

тування до задачі геометричного програмування, розв'язує двоїсту задачу геометричного програмування та здійснює пружний розрахунок конструкції в оптимальній точці.

При значеннях фіксованих параметрів

$$R_2 = 19,45 \text{ мм}, \quad S_2 = 38,9 \text{ мм}, \quad \ell = 10 \text{ мм},$$

$$[G] = 0,9 \text{ кг/мм}^2, \quad [G] = 0,6 \text{ кг/мм}^2,$$

вихідній точці

$$h_1 = 1,2 \text{ мм}, \quad h_2 = 1 \text{ мм}, \quad h_3 = 0,6 \text{ мм},$$

$$F = 2 \text{ мм}, \quad \alpha = \pi/6 = 0,523538, \quad S_1 = 18,9 \text{ мм}$$

отримано такі оптимальні величини:

$$h_1 = 1,678 \text{ мм}, \quad h_2 = 1,464 \text{ мм}, \quad h_3 = 0,685 \text{ мм},$$

$$F = 2,457 \text{ мм}, \quad \alpha = 0,513454, \quad S_1 = 30,18 \text{ мм}.$$

1. Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование. М., 1972. 2. Ощипко Л.И. Оптимальный расчет оболочек ЕВП // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1984, Вип.22. С.49-53.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.88

УДК.539.3

А.В.Дубовик

АНАЛІЗ УМОВ СПРЯЖЕННЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ КОМБІНОВАНИХ МОДЕЛЕЙ

Складність аналізу складових конструкцій і комбінованих систем зумовлена тим, що в різних ділянках таких конструкцій можуть мати місце різні види напруженого стану - від одномірного до суттєво тримірного. Аналіз можна значно спростити, застосовувши комбіновані математичні моделі теорії пружності. У рамках таких моделей передбачається, зокрема, залучення для опису напружено-деформованого стану в одних частинах тіла рівнянь теорії пружності, а в інших - рівнянь теорії оболонок. Праці, присвячені розробці комбінованих моделей, відрізняються способами запису граничних умов спряження, а також методами їхньої реалізації [2,5-7].

Проаналізуємо ефективність застосування різних методик врахування умов спряження для випадку задачі про плоску деформацію пружного тіла, спряженого з пластинкою.

1. Припустимо, що тіло займає двовимірну область Ω /рис.1/ з границею $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Пластинка має скінченну довжину ℓ

і постійну товщину h . Спряження відбувається вздовж ділянки границі Γ_2 ($\alpha=0$). Припускаємо, що частина границі Γ_2 прямолінійна та перпендикулярна до серединної поверхні пластинки.

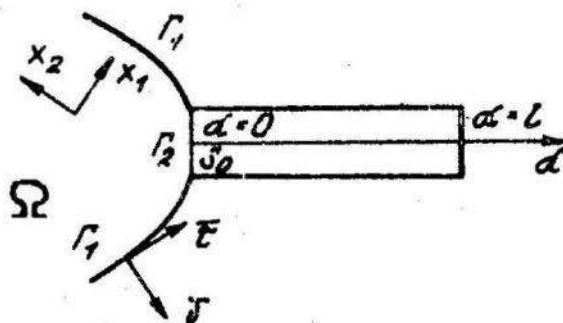


Рис. 1

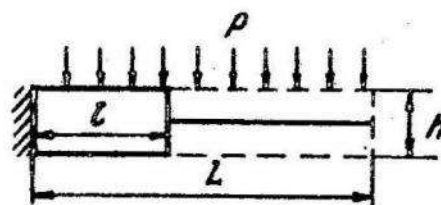


Рис. 2

Напружено-деформований стан НДС/ тіла описує система рівнянь [1]:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial x_2^2} \right) &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial x_2^2} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (x_1, x_2) \in \Omega$$

/1/

а НДС пластинки - рівняння [3]

$$\begin{aligned} B \frac{d^2 u_1^{(2)}}{d\alpha^2} + p_1 &= 0, \\ G \left(\frac{d\gamma_1}{d\alpha} + \frac{d^2 W}{d\alpha^2} \right) + p_n &= 0, \quad 0 \leq \alpha \leq l, \\ D \frac{d^2 \gamma_1}{d\alpha^2} - G \left(\gamma_1 + \frac{dW}{d\alpha} \right) + m_1 &= 0. \end{aligned}$$

/2/

Тут $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}$ - переміщення точок пружного тіла; $u_1^{(2)}, W, \gamma_1$ - переміщення та кут повороту нормалі точок серединної поверхні пластинки; λ, μ, G, D, B - постійні, які характеризують властивості матеріалу тіла та жорсткостні властивості пластинки.

На границі Γ_1 області Ω , а також у точці $\alpha = l$ припустимо заданими граничні умови для пружного тіла і пластинки.

На границі Γ_2 задано кінематичні умови спряження, які виражають умови нерозривності переміщень

$$u_\tau^{(1)}(S) = W(0), \quad u_\nu^{(1)}(S) = u_\nu^{(2)}(0) + \chi_1(0)(S - S_0),$$

$$S_0 - \frac{h}{2} \leq S \leq S_0 + \frac{h}{2},$$

/3/

а також умови статичної рівноваги

$$\int_{S_0-h/2}^{S_0+h/2} \sigma_{\nu\nu}^{(1)} dS = T_1^{(2)}, \quad \int_{S_0-h/2}^{S_0+h/2} \sigma_{\nu\tau}^{(1)} dS = Q_1^{(2)}, \quad \int_{S_0-h/2}^{S_0+h/2} \sigma_{\nu\nu}^{(1)} (S - S_0) dS = M_1^{(2)},$$

/4/

де S - елемент дуги; σ_{ij} - компоненти тензора напружень, віднесені до пари векторів (ν, τ) ; $T_1^{(2)}$, $M_1^{(2)}$, $Q_1^{(2)}$ - компоненти вектора зусиль-моментів.

Коли припустити, що на границі тіла Γ_2 виконуються умови, які характерні для моделей типу пластинка Тимошенка /відсутнє обтиснення оболонки і нормаль зберігає прямолінійну форму після деформування/, то задоволення умови нерозривності переміщень зводиться до задоволення трьох умов у точці S_0 :

$$u_\tau^{(1)}(S_0) = W(0), \quad \frac{\partial u_\nu^{(1)}}{\partial \tau}(S_0) = \chi_1(0), \quad u_\nu(0) = u_\nu^{(2)}(0).$$

/5/

Таким чином, системи рівнянь /1/, /2/, доповнені відповідними граничними умовами, а також умовами нерозривності переміщень /3/ або /5/ і умовами статичної рівноваги /4/ на лінії спряження, становлять крайову задачу про плоску деформацію комбінованої моделі.

2. Розглянемо варіаційні постановки задачі. Внаслідок аддитивності енергії потенціальну енергію системи "пружне тіло - пластинка Тимошенка" можна зобразити у вигляді суми

$$\Pi_c = \Pi_T + \Pi_0,$$

/6/

де Π_T , Π_0 - функціонали потенціальної енергії тіла і пластинки [4,3].

Крайова задача /1/ - /4/ еквівалентна задачі про знаходження мінімуму функціоналу /6/ на полі геометрично можливих переміщень, які задовольняють кінематичні граничні умови, а також умови нерозривності переміщень.

При виконанні методу скінченних елементів для розв'язування рівняння $\delta \Pi_\epsilon = 0$ умови /3/ і /5/ записуємо у вигляді

$$[\bar{u}_j] = [\beta_1] [\bar{u}_j^0],$$

/7a/

$$[\beta_2] [\bar{u}_j] = [\bar{u}_j^0].$$

/7б/

Тут $\bar{u}_j$, $\bar{u}_j^0$ - вектори, які включають відповідні вузлові переміщення тіла і пластинки; $[\beta_1]$, $[\beta_2]$ - матриці констант.

Припустимо, що u_j і u_j^0 - вектори, які містять незалежні вузлові переміщення тіла та пластинки.

Виконаємо перетворення координат

$$\begin{bmatrix} u_j \\ \bar{u}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ \bar{u}_j^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ \bar{u}_j^0 \end{bmatrix}$$

для випадку використання умов /3/, або

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_j^0 \\ u_j^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_2 & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_j \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_2 \\ \mathcal{J}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_j \\ u_j \end{bmatrix}$$

при застосуванні співвідношень /5/.

Для /3/ ця операція приводить до функціоналу потенціальної енергії пружного тіла

$$\begin{aligned} \Pi_T &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_j \\ \bar{u}_j^0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_T \\ Q_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ \bar{u}_j \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_j \\ \bar{u}_j^0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_T \\ Q_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ \bar{u}_j^0 \end{bmatrix} - \\ &- \begin{bmatrix} u_j \\ \bar{u}_j^0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_T \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_j \\ \bar{u}_j^0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K^* \\ Q^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ \bar{u}_j^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_j \\ \bar{u}_j^0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q^* \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

де K_T , K^* , Q_T , Q^* - матриці жорсткості та вектори правих частин до і після перетворення координат.

Аналогічні вирази можна отримати для перетворення функціоналу потенціальної енергії оболонки Π_0 при використанні співвідно-

шень /5/. Дальші перетворення, пов'язані з об'єднанням співвідношень для тіла й оболонки в єдину систему, є традиційними для методу скінченних елементів.

Існує можливість уникнути труднощів, пов'язаних з необхідністю задоволення умов спряження /3/ або /5/, використовуючи функціонал потенціальної енергії зі штрафом

$$\Pi_c = \Pi_T + \Pi_0 + \Pi_\varepsilon,$$

де Π_ε - штрафна складова

$$\Pi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_2} [\mathcal{U}_v^{(n)}(s) - \mathcal{U}_i^{(2)}(0) - \gamma_i(0)(s-s_0)]^2 d\Gamma_2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_2} [\mathcal{U}_\tau^{(n)}(s) - W(0)]^2 d\Gamma_2 \quad /8/$$

або

$$\Pi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ [\mathcal{U}_\tau^{(n)}(s_0) - W(0)]^2 + \left[\frac{\partial \mathcal{U}_v^{(n)}(s_0)}{\partial \tau} - \gamma_i(0) \right]^2 + [\mathcal{U}_v^{(n)}(s_0) - \mathcal{U}_i^{(2)}(0)]^2 \right\}.$$

Можна показати, що умови /3/, /5/ впливають з рівнянь Ейлера функціоналу /8/ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Можливе використання також варіантів, коли деякі умови спряження виконуються точно шляхом заміни системи координат у відповідних вузлах, а інші штрафуються.

3. Для визначення найбільш раціональної методики врахування умов спряження проводили порівняльні розрахунки для задачі про згин консольної балки /рис. 2/. Розрахунки стосувалися для випадку штрафкування всіх умов на переміщення, штрафкування тільки умов, які містять величину $\gamma_i(0)$, а також випадку безпосереднього врахування всіх геометричних умов спряження. Як бачимо, вдалий вибір параметра штрафу дає змогу отримати результати тотожні тим, які відстають при безпосередньому врахуванні обмежень на переміщення.

Таблица 1

x/L	G_{xy}			G_{xx}		
	ТП	I	П	ТП	I	П
$\emptyset, \emptyset$	-43,3	-43,3	-43,3	338	338	338
0,0625	5,06	5,08	5,15	267	267	266
0,125	-1,59	-1,81	-2,06	230	230	230
0,188	-1,86	-2,20	-4,99	197	198	199

Таблица 2

y/L	G_{xy}								
	$x = 0$			$x = 0,125$			$x = 0,250$		
	ТП	I	П	ТП	I	П	ТП	I	П
-0,05	-42,7	-42,6	-42,7	-1,59	-1,81	-2,06	-1,63	-1,67	11,6
-0,033	-16,9	-16,9	-16,9	-8,02	-8,02	-7,99			
-0,0167	4,24	4,24	4,23	-13,6	-13,5	-15,5			
0,0	6,41	6,41	6,42	-14,3	-14,3	-14,1	-12,0	-11,4	-20,2
0,0167	4,07	4,07	4,06	-13,6	-13,5	-13,5			
0,033	-17,3	-17,3	-17,3	-8,02	-8,02	-7,99			
0,05	-43,3	-43,3	-43,3	-1,59	-1,81	-2,06	-1,63	-1,67	-12,3

Таблица 3

y/L	G_{xx}								
	$x = 0$			$x = 0,125$			$x = 0,250$		
	ТП	I	П	ТП	I	П	ТП	I	П
-0,05	-337	-337	-337	-230	-230	-230	-168	-173	-180
-0,033	-211	-211	-211	-153	-153	-154			
-0,0167	-92,8	-92,8	-92,9	-77,2	-77,3	-77,7			
0,0	-0,5	-0,06	-0,06	0,02	0	0,04	0	0	-0,06
0,0167	92,8	82,7	92,8	77,2	77,3	77,7			
0,033	212	212	212	153	153	154			
0,05	338	338	338	230	230	230	168	173	181

На прикладі задачі про згин балки проводили також порівняльні розрахунки з метою визначення найбільш доцільної форми запису геометричних умов нерозривності /3/ або /5/. Результати одержані для значень $\frac{L}{\rho} = 4$, $\frac{E}{\rho} = 10^4$, $\nu = 0,3$, $h/L = 0,1$. При цьому застосовували штраф $\frac{1}{\varepsilon} = 10^3 \frac{E}{L}$.

У табл. 1 наведені величини напружень σ_{xy} , σ_{xx} на поверхні навантаження, отримані на основі моделі плоскої задачі теорії пружності /П/, а також виходячи з комбінованої моделі з застосуванням умов нерозривності переміщень у формі /5/ /графа I/ та /3/ /графа II/. Результати табл. 2,3 дають змогу судити про поведінку напружень σ_{xy} , σ_{xx} відповідно вздовж товщини оболонки. Дані свідчать про те, що з допомогою /5/ можна досягти кращих результатів, особливо в зонах поблизу лінії спряження після деформації. Однак при програмній реалізації використання співвідношень /5/ накладає суттєві обмеження на сітку скінченних елементів, яка покриває область Ω , тоді як застосування умов /3/ дає змогу проводити незалежні розбиття тіла та пластинки. Тому більш раціональним є застосування умов нерозривності переміщень на лінії спряження у формі /3/.

1. Дыяк И.И. Решение двумерных задач квазистатической термоупругости на основе применения высокоточных схем МКЭ: Автореф. дис... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1984. 2. Паутов А.Н., Шуваев Л.Н. Комбинированная расчетная модель осесимметричной оболочки в условиях контактного взаимодействия. Горький, 1984. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 8069 - 84. 3. Пелех Б.Л. Обобщенная теория оболочек. Львов, 1978. 4. Розин Л.А. Вариационные постановки задач для упругих систем. Л., 1978. 5. Шуваев Д.Н. Численный анализ взаимодействия оболочек с упругой средой // Мат. 4 науч. конф. молодых ученых мех.-мат. факультета. Горький, 1979, С. 199-211. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 2856 - 79 деп. 6. Surana K.S. Transition finite elements for axisymmetric stress analysis // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1980, 15, № 6, p. 809-832. 7. Surana K.S. Transition finite elements for three dimensional stress analysis // Int. J. Numer. Eng. 1980, 15, № 7, p. 991-1020.

Стаття надійшла до редколегії 10.05.88