УДК 518:517.948

С.М.Шахно

ЗБІЖНІСТЬ ОДНОГО ІТЕРАЦІЙНОГО МЕТОДУ З ПОСЛІДОВНОЮ АПРОКСИМАЦІЄЮ ОБЕРНЕНОГО ОПЕРАТОРА

Для розв"язування нелінійного рівняння

$$P(x) = x - \varphi(x) = 0 \qquad /1/$$

у банаховому просторі X ми запропонували та дослідили метод Ньютона з прискореною збіжністю [1]. Однак у ньому на кожній ітерації потрібно знаходити обернений оператор /розв"язувати лінійне операторне рівняння/, що не завжди легко зробити. Тому в [2], використовуючи ідею послідовної апроксимації оберненого оператора [3], побудовано метод, який не вимагає розв"язування лінійних задач. Спробуємо отримати умови й оцінки швидкості збіжності цього ітераційного методу.

Для розв"язування /1/ розглянемо ітераційний процес [2]

$$x_{n+1} = x_n - A_n P(x_n), \qquad /2/$$

$$A_{n+1} = A_n\left[2E - P'\left(\frac{x_{n+1} + \varphi(x_{n+1})}{2}\right)A_n\right], \qquad /3/$$

де E – одиничний оператор; x_0, A_0 – відповідно початкові наближення до точного розв"язку x^* рівняння /1/ і до оберненого оператора $A^* = [P'(x^*)]^{-1}$, $n = 0, 1, \ldots$ Достатні умови збіжності процесу /2/, /3/ до x^* і A^* дає наступна теорема.

<u>Теорема</u>. Нехай: 1/ рівняння /1/ має розв"язок x^* і існує $A^* = [P'(x^*)]^{-1}$, причому $\|A^*\| \leq B$;
2/ у сфері $\Omega_* = \{x : \|x - x^*\| \leq \beta r_0\}$, де $\beta = max\{1, M\}$, справедливі оцінки

$$\|\varphi'(x)\| \leq M; \quad \|P''(x) - P''(y)\| \leq N\|x - y\|;$$

3/ $\|P'(x^*)\| \leq C$;

4/ $h_0 = max\left\{K_0;\ C + \frac{1+M}{2} L K_0 (B^2 + 2Br_0 + r_0^2)\right\} \leq \frac{1}{r_0}$, де

$$r_0 = max\left\{\|x_0 - x^*\|, \|A_0 - A^*\|\right\}; \; L \geq \sup_{x \in \Omega_*} \|P''(x)\|;$$

$$K_0 = C + \frac{1+2M}{2} L(B+r_0) + \frac{1}{24}(B+r_0)N(1+M)^2 r_1.$$

Тоді послідовності $\{x_n\}$ і $\{A_n\}$ збігаються відповідно до x^* і A^*, причому справедливі оцінки

$$r_n = max\left\{\|x_n - x^*\|, \|A_n - A^*\|\right\} \leq (h_0 r_0)^{2^n - 1} r_0, \qquad /4/$$

де $n = 0,1,\ldots$

<u>Доведення</u>. Із /2/ шляхом тотожних перетворень знаходимо

$$x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - A_n P(x_n) = x_n - x^* - A_n \times$$

$$\times \left\{ P'\left(\frac{x_n + \varphi_n}{2}\right)(x_n - x^*) + \int_0^1 \left(P''\left(\frac{x_n + \varphi_n}{2} + \tau\left(x_n - \frac{x_n + \varphi_n}{2}\right)\right) - \right.\right.$$

$$- P''\left(\frac{x_n + \varphi_n}{2} + \tau\left(x^* - \frac{x_n + \varphi_n}{2}\right)\right)\Big)(1-\tau)d\tau \left(x_n - \frac{x_n + \varphi_n}{2}\right)^2 +$$

$$+ \int_0^1 P''\left(\frac{x_n + \varphi_n}{2} + \tau\left(x^* - \frac{x_n + \varphi_n}{2}\right)\right)(1-\tau)d\tau \left[\left(x_n - \frac{x_n + \varphi_n}{2}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \left(x^* - \frac{x_n + \varphi_n}{2}\right)^2\right] = \left[E - A_n P'\left(\frac{x_n + \varphi_n}{2}\right)\right](x_n - x^*) -$$

$$- A_n \left[\int_0^1 \left(P''\left(\frac{x_n + \varphi_n}{2} + \tau\left(x_n - \frac{x_n + \varphi_n}{2}\right)\right) - P''\left(\frac{x_n + \varphi_n}{2} + \tau\left(x^* - \right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{x_n + \varphi_n}{2}\right)\right)\right)(1-\tau)d\tau \left[\frac{x_n - x^*}{2} + \frac{\varphi_n - \varphi^*}{2}\right]^2 +$$

$$+ \int_0^1 P''\left(\frac{x_n + \varphi_n}{2} + \tau\left(x^* - \frac{x_n + \varphi_n}{2}\right)\right)(1-\tau)d\tau (x_n - x^*)(\varphi^* - \varphi_n).$$

Оскільки

$$E - A_n P'\left(\frac{x_n + \varphi_n}{2}\right) = A^* P'\left(\frac{x^* + \varphi^*}{2}\right) - A_n P'\left(\frac{x_n + \varphi_n}{2}\right) =$$

$$= (A^* - A_n) P'\left(\frac{x^* + \varphi^*}{2}\right) + A_n \left(P'\left(\frac{x^* + \varphi^*}{2}\right) - P'\left(\frac{x_n + \varphi_n}{2}\right)\right)$$

і

$$\|A_n\| \leq \|A^*\| + \|A^* - A_n\| \leq B + \|A^* - A_n\|, \qquad /5/$$

то, використовуючи умови 2 і 3 теореми, дістаємо

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \Big[C\|A_n - A^*\| + (B + \|A_n - A^*\|)\tfrac{1}{2} L(1+M) \times$$

$$\times \|x_n - x^*\|\Big]\|x_n - x^*\| + \tfrac{1}{2}\left(B + \|A_n - A^*\|\right)\Big[\tfrac{N}{12}\|x_n - x^*\|^3 \times$$

$$\times (1+M)^2 + LM\|x_n - x^*\|^2\Big] = C\|A_n - A^*\|\,\|x_n - x^*\| +$$

$$+ \tfrac{1}{2} BL(1+2M)\|x_n - x^*\|^2 + \tfrac{1}{2} L(1+2M)\|x_n - x^*\|^2 \|A_n - A^*\| +$$

$$+ \frac{1}{24}\left(B + \|A^* - A_n\|\right) N(1+M)^2 \|x_n - x^*\|^3. \qquad /6/$$

З іншого боку,

$$A^* - A_{n+1} = A^* - A_n\left(2E - P'\left(\frac{x_{n+1} + \varphi_{n+1}}{2}\right) A_n\right) =$$

$$= A^* - A_n\left(E + P'(x^*) A^* - P'\left(\frac{x_{n+1} + \varphi_{n+1}}{2}\right) A_n\right) =$$

$$= A^* - A_n\left(E + P'(x^*)(A^* - A_n) + \left(P'(x^*) - P'\left(\frac{x_{n+1} + \varphi_{n+1}}{2}\right)\right) A_n\right) = \qquad /7/$$

$$= E - A_n P'(x^*)(A^* - A_n) - A_n\left(P'(x^*) - P'\left(\frac{x_{n+1} + \varphi_{n+1}}{2}\right)\right) A_n =$$

$$= (A^* - A_n) P'(x^*)(A^* - A_n) - A_n\left(P'(x^*) - P'\left(\frac{x_{n+1} + \varphi_{n+1}}{2}\right)\right) A_n$$

Попередньо оцінимо норму

$$\left\|P'(x^*)-P'\left(\frac{x_{n+1}+\varphi_{n+1}}{2}\right)\right\| \le \|P''(\tilde{x})\| \left\|x^*-\frac{x_{n+1}}{2}-\frac{\varphi_{n+1}}{2}\right\| =$$

$$=\|P''(\tilde{x})\| \left\|\frac{x^*-x_{n+1}}{2}+\frac{\varphi^*-\varphi_{n+1}}{2}\right\| \le \frac{1}{2}L(1+M)\|x^*-x_{n+1}\|,$$

$$\left(\tilde{x}=\frac{x_{n+1}+\varphi_{n+1}}{2}+\theta\left(x^*-\frac{x_{n+1}+\varphi_{n+1}}{2}\right),\ 0<\theta<1\right).$$

/8/

З урахуванням /8/ із /7/ записуємо

$$\|A^*-A_{n+1}\| \le C\|A^*-A_n\|^2+\frac{1}{2}L(1+M)\|x^*-x_{n+1}\| \times$$

$$\times\left(B^2+2B\|A^*-A_n\|+\|A^*-A_n\|^2\right).$$

/9/

Використовуючи оцінки /6/, /9/ і умову /4/, для $n=1$ маємо

$$r_1=\max\left\{\|x_1-x^*\|,\ \|A_1-A^*\|\right\} \le \max\left\{C\|A_0-A^*\|\|x_0-x^*\|+\right.$$

$$+\frac{1}{2}BL(1+2M)\|x_0-x^*\|^2+\frac{1}{2}L(1+2M)\|x_0-x^*\|^2\times$$

$$\times\|A_0-A^*\|+\frac{1}{24}\left(B+\|A^*-A_0\|\right)N(1+M)^2\|x_0-x^*\|^3;$$

$$\left.C\|A_0-A^*\|^2+\frac{1}{2}L(1+M)\|x^*-x_1\|\left(B^2+2B\|A_0-A^*\|+\|A_0-A^*\|^2\right)\right\} \le$$

$$\le\max\left\{Cr_0^2+\frac{1}{2}(1+2M)BLr_0^2+\frac{1+2M}{2}Lr_0^3+\right.$$

$$+\frac{1}{24}(B+r_0)N(1+M)^2r_0^3;\ Cr_0^2+\frac{1+M}{2}L\left[Cr_0^2+\frac{1}{2}(1+2M)\times\right.$$

$$\left.\left.\times BLr_0^2+\frac{1+2M}{2}Lr_0^3\right]\left(B^2+2Br_0+r_0^2\right)\right\}=$$

$$=\max\left\{K_0;\ C+\frac{1+M}{2}LK_0\left(B^2+2Br_0+r_0^2\right)\right\}r_0^2=\left(h_0r_0\right)^{2^1-1}r_0,$$

тобто справедлива нерівність /4/.

Далі за допомогою математичної індукції легко одержати оцінку /4/ для довільного $n \geq 2$. Теорема доведена.

Наслідок. Виберемо $A_0 = \left[P'\left(\frac{x_0+\varphi_0}{2}\right)\right]^{-1}$, причому $\| A_0 \| \leq B_0$. Тоді

$$A^* - A_0 = \left[P'(x^*)\right]^{-1} - \left[P'\left(\frac{x_0+\varphi_0}{2}\right)\right]^{-1} = \left[P'\left(\frac{x_0+\varphi_0}{2}\right)\right]^{-1} \times$$

$$\times \left[P'\left(\frac{x_0+\varphi_0}{2}\right) - P'\left(\frac{x^*+\varphi^*}{2}\right)\right]\left[P'(x^*)\right]^{-1}$$

і

$$\| A^* - A_0 \| \leq B_0 L B \, \frac{1+M}{2} \, \| x^* - x_0 \| .$$

Таким чином, у теоремі можна взяти

$$\tau_0 = m \, \| x^* - x_0 \| ,$$

де

$$m = \max\left\{1, \; B_0 L B \, \frac{1+M}{2}\right\} .$$

Відзначимо, якщо $M<1$, то для x_0 , достатньо близького до x^* , h_0 буде меншим, ніж відповідне h_0 з теореми праці [3]. Тому ітераційний процес /2/, /3/ збігатиметься швидше, ніж метод, запропонований у [3] . Кількість обчислень на одній ітерації в обох методах однакова.

Отже, метод /2/, /3/ ефективніший від методу з [3] .

1. Б а р т и ш М.Я., Ш а х н о С.М. О методе Ньютона с ускоренной сходимостью //Вестн. Киев. ун-та. Моделирование и оптимизация сложных систем. 1987. Вып. 6. С.62-66. 2. Б а р т и ш М.Я., Ш а х н о С.М. Модификации ускоренного метода Ньютона с последовательной и параллельной аппроксимациями обратного оператора //Распараллеливание обработки информации: Тез. докл. VI Всесоюзн. школы-семинара. Львов, 1987. С.111-112. 3. У л ь м С.Ю. Об итерационных методах с последовательной аппроксимацией обратного оператора // Изв. АН ЭССР. Физика, математика. 1967. 16. № 4. С.403-411.

Стаття надійшла до редколегії 12.09.88