УДК 539.3

П.П.Вагін, І.С.Муха, Я.Г.Савула

РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ СТАТИКИ ОБОЛОНОК ТИПУ ТИМОШЕНКА МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Шляхи побудови різних нелінійних теорій оболонок грунтуються на рівняннях нелінійної теорії пружності [5]. Існує достатньо велика кількість праць, в яких наведені також різні варіанти рівнянь нелінійної теорії оболонок. Для розв"язання практичних задач необхідна система рівнянь, яка була б зручною при використанні числових методів. Такі системи, що грунтуються на класичній гіпотезі Кірхгофа-Ляме, наведені в [2]. Побудові геометрично нелінійних рівнянь узагальненої теорії оболонок присвячені дослідження [1,3,4].

Нехай переміщення U_1, U_2, U_3 довільної точки з координатами α_1, α_2, α_3 / α_1, $\alpha_2 \in \Omega$, $-h/2 \leqslant \alpha_3 \leqslant h/2$ / визначаються через переміщення u_1, u_2, W і кути повороту γ_1, γ_2 за формулами [7]

$$U_i(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = u_i(\alpha_1,\alpha_2) + \alpha_3 \gamma_i(\alpha_1,\alpha_2),\ i=1,2,$$
$$U_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = W(\alpha_1,\alpha_2). \qquad /1/$$

За вихідні приймаємо такі вирази для деформацій [6]:

$$\tilde{\varepsilon}_{11} = e_{11} + \frac{1}{2}\left[e_{11}^2 + \left(\frac{1}{2}e_{12} + \omega_3\right)^2 + \left(\frac{1}{2}e_{13} - \omega_2\right)^2\right],$$

$$\tilde{\varepsilon}_{12} = e_{12} + e_{11}\left(\frac{1}{2}e_{12} - \omega_3\right) + e_{22}\left(\frac{1}{2}e_{12} + \omega_3\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{2}e_{13} - \omega_2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}e_{23} + \omega_1\right),\ (1 \to 2 \to 3), \qquad /2/$$

де e_{ij} і ω_k - компоненти деформації та кути повороту, які в довільній ортогональній системі координат записуються у вигляді

$$e_{11} = \frac{\partial_1 U_1}{H_1} + \frac{U_2}{H_1 H_2}\partial_2 H_1 + \frac{U_3}{H_1 H_3}\partial_3 H_1,$$

$$e_{12} = \frac{H_2}{H_1}\partial_1 \frac{U_2}{H_2} + \frac{H_1}{H_2}\partial_2 \frac{U_1}{H_1},$$

$$2\omega_1 = \frac{1}{H_1 H_3}\left(\partial_2 H_3 U_3 - \partial_3 H_2 U_2\right),\ (1 \to 2 \to 3) \qquad /3/$$

Тут H_i -параметри Ляме; $\partial_i = \partial/\partial\alpha_i$. Надалі вважатимемо, що серединна поверхня оболонки віднесена до ортогональних криволінійних координат. У вибраній системі координат параметри Ляме мають вигляд

$$H_1 = A_1(1+\alpha_3 K_1), \quad H_2 = A_2(1+\alpha_3 K_2), \quad H_3 = 1, \qquad /4/$$

де $A_i = A_i(\alpha_1, \alpha_2)$ - коефіцієнти першої квадратичної форми серединної поверхні; K_i - головні її кривини.

Припускаємо, що параметри e_{ij} і поворот ω_3 елемента оболонки - малі величини більш високого порядку, ніж повороти ω_1 та ω_2 відносно α_1 і α_2 координатних ліній [2,8] . Тоді співвідношення /2/ в урахуванням гіпотез Тимошенка можна представити

$$\tilde{\varepsilon}_{11} = e_{11} + \frac{1}{2}\omega_2^2, \qquad \tilde{\varepsilon}_{22} = e_{22} + \frac{1}{2}\omega_1^2,$$
$$\tilde{\varepsilon}_{12} = e_{12} - \omega_1\omega_2, \qquad \tilde{\varepsilon}_{13} = e_{13}, \quad \tilde{\varepsilon}_{23} = e_{23}. \qquad /5/$$

Заміняючи в /5/ згідно з /3/ компоненти деформацій e_{ij} та повороти ω_K і враховуючи при цьому формули для визначення параметрів Ляме /4/ та закон зміни переміщень по товщині /1/, одержуємо

$$\tilde{\varepsilon}_{11} = \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}{}_2^2 + \alpha_3\left(\varkappa_1 + \overset{0}{\omega}_2\overset{1}{\omega}_2 - \frac{1}{2}K_1\overset{0}{\omega}{}_2^2\right)\right)\Big/\left(1+\alpha_3 K_1\right),$$
$$\tilde{\varepsilon}_{22} = \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}{}_1^2 + \alpha_3\left(\varkappa_2 + \overset{0}{\omega}_1\overset{1}{\omega}_1 - \frac{1}{2}K_2\overset{0}{\omega}{}_1^2\right)\right)\Big/\left(1+\alpha_3 K_2\right),$$
$$\tilde{\varepsilon}_{12} = \Big(\varepsilon_{12} - \overset{0}{\omega}_1\overset{0}{\omega}_2 + 2\alpha_3\Big(\varkappa_{12} - \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}_1\overset{1}{\omega}_2 -$$
$$- \frac{1}{2}\overset{1}{\omega}_1\overset{0}{\omega}_2\Big)\Big)\Big/(1+\alpha_3 K_1)(1+\alpha_3 K_2),$$
$$\tilde{\varepsilon}_{13} = \varepsilon_{13}\big/(1+\alpha_3 K_1), \quad \tilde{\varepsilon}_{23} = \varepsilon_{23}\big/(1+\alpha_3 K_2). \qquad /6/$$

Формули /6/ - це геометричні співвідношення для гнучких оболонок, де

$$\overset{0}{\omega}_1 = \frac{1}{2}\left(-K_2 U_2 + \frac{1}{A_2}\partial_2 W - \gamma_2\right); \qquad \overset{1}{\omega}_1 = -K_2\gamma_2;$$

$$\overset{0}{\omega}_2 = \frac{1}{2}\left(K_1 U_1 - \frac{1}{A_1}\partial_1 W + \gamma_1\right); \qquad \overset{1}{\omega}_2 = K_1\gamma_1, \qquad /7/$$

ε_1, ε_2, ε_{12}, ε_{13}, ε_{23}, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_{12}$ - компоненти деформацій лінійної теорії оболонок, які наведені в [7].

Рівняння рівноваги геометрично нелінійної теорії оболонок і статичні граничні умови випливають з принципу Лагранжа, згідно з яким робота δA внутрішніх сил на варіаціях переміщень дорівнює роботі δL зовнішніх сил на цих же варіаціях

$$\delta A = \delta L, \qquad /8/$$

де

$$\delta A = \iint_\Omega \left[\int_{-h/2}^{h/2} \left(\sigma_{11}\delta\tilde{\varepsilon}_{11} + \sigma_{22}\delta\tilde{\varepsilon}_{22} + \sigma_{12}\delta\tilde{\varepsilon}_{12} + \sigma_{13}\delta\tilde{\varepsilon}_{13} + \sigma_{23}\delta\tilde{\varepsilon}_{23}\right) \times \right.$$
$$\left. \times\, (1+\alpha_3 K_1)(1+\alpha_3 K_2)\, d\alpha_3 \right] A_1 A_2\, d\alpha_1 d\alpha_2; \qquad /9/$$

$$\delta L = \iint_\Omega \left[\int_{-h/2}^{h/2} F\delta U (1+\alpha_3 K_1)(1+\alpha_3 K_2)\, d\alpha_3 \right] A_1 A_2\, d\alpha_1 d\alpha_2 +$$

$$+ \int_\Gamma \sigma_j \delta U (1+\alpha_3 K_t)\, dS + \iint_\Omega \sigma_j^{h/2} \delta U^{h/2} \left(1+\frac{h}{2}K_1\right)\left(1+\frac{h}{2}K_2\right) A_1 A_2\, d\alpha_1 d\alpha_2 +$$

$$+ \iint_\Omega \sigma_j^{-h/2} \delta U^{-h/2} \left(1-\frac{h}{2}K_1\right)\left(1-\frac{h}{2}K_2\right) A_1 A_2\, d\alpha_1 d\alpha_2, \qquad /10/$$

де Γ - границя області серединної поверхні; U - вектор переміщень оболонки як тривимірного тіла, K_t - нормальна кривина серединної поверхні за напрямком дотичної до кривої Γ. Співвідношення /10/ є сумою робіт об"ємної F та поверхневих сил σ_j, прикладених до бокової, верхньої $/\ \alpha_3 = h/2\ /$ і нижньої $/\ \alpha_3 = -h/2\ /$ поверхонь оболонки.

Вводячи у /8/ замість напруження σ_{ij} їх інтегральні характеристики [6] і прирівнюючи коефіцієнти при незалежних варіаціях, отримуємо рівняння рівноваги.

$$\partial_1 A_2 T_1 - T_2 \partial_1 A_2 + \frac{1}{A_1} \partial_2 A_1^2 S + H k_2 \partial_2 A_1 + \partial_2 H k_1 A_1 + k_1 A_1 A_2 Q_1^* = - A_1 A_2 P_1 ,$$

$$\partial_2 A_1 T_2 - T_1 \partial_2 A_1 + \frac{1}{A_2} \partial_1 A_2^2 S + H k_1 \partial_1 A_2 + \partial_1 H k_2 A_2 + k_2 A_1 A_2 Q_2^* = - A_1 A_2 P_2 ,$$

$$T_1 k_1 + T_2 k_2 - \frac{1}{A_1 A_2} \left(\partial_1 Q_1^* A_2 + \partial_2 Q_2^* A_1 \right) = P_3 ,$$

$$\partial_1 A_2 M_1 - M_2 \partial_1 A_2 + H \partial_2 A_1 + \partial_2 H A_1 - A_1 A_2 Q_1^{**} + A_1 A_2 k_1 \left(H \overset{o}{\omega}_1 - M_1 \overset{o}{\omega}_2 \right) = - A_1 A_2 \overset{o}{m}_1 ,$$

$$\partial_2 A_1 M_2 - M_1 \partial_2 A_1 + H \partial_1 A_2 + \partial_1 H A_2 - A_1 A_2 Q_2^{**} + A_1 A_2 k_2 \left(M_2 \overset{o}{\omega}_1 - H \overset{o}{\omega}_2 \right) = - A_1 A_2 \overset{o}{m}_2 ,$$

$$Q_1^* = Q_1 - \frac{1}{2} \left[(T_1 - k_1 M_1) \overset{o}{\omega}_2 + M_1 \overset{1}{\omega}_2 - S \overset{o}{\omega}_1 - H \overset{1}{\omega}_1 \right], \qquad /11/$$

$$Q_1^{**} = Q_1 + \frac{1}{2} \left[(T_1 + k_1 M_1) \overset{o}{\omega}_2 + M_1 \overset{1}{\omega}_2 - (S + 2 k_1 H) \overset{o}{\omega}_1 - H \overset{1}{\omega}_1 \right],$$

$$Q_2^* = Q_2 + \frac{1}{2} \left[(T_2 - k_2 M_2) \overset{o}{\omega}_1 + M_2 \overset{1}{\omega}_1 - S \overset{o}{\omega}_2 - H \overset{1}{\omega}_2 \right],$$

$$Q_2^{**} = Q_2 - \frac{1}{2} \left[(T_2 + k_2 M_2) \overset{o}{\omega}_1 + M_2 \overset{1}{\omega}_1 - (S + 2 k_2 H) \overset{o}{\omega}_2 - H \overset{1}{\omega}_2 \right],$$

$$P_i = \left(1 + k_1 \frac{h}{2}\right)\left(1 + k_2 \frac{h}{2}\right) \sigma_i^+ - \left(1 - k_1 \frac{h}{2}\right)\left(1 - k_2 \frac{h}{2}\right) \sigma_i^- + \int_{-h/2}^{h/2} F_i (1 + \alpha_3 k_1)(1 + \alpha_3 k_2)\, d\alpha_3 ,$$

$$\overset{o}{m}_j = \frac{h}{2} \left[\left(1 + k_1 \frac{h}{2}\right)\left(1 + k_2 \frac{h}{2}\right) \sigma_j^+ - \left(1 - k_1 \frac{h}{2}\right)\left(1 - k_2 \frac{h}{2}\right) \sigma_j^- \right] + \int_{-h/2}^{h/2} F_j \alpha_3 (1 + \alpha_3 k_1)(1 + \alpha_3 k_2)\, d\alpha_3 ,$$

$$i = 1,2,3 ; \qquad j = 1,2$$

і статичні крайові умови

$$T_t = T_1\cos^2\lambda + S\sin 2\lambda + T_2\sin^2\lambda + (K_1 + K_2)H\sin 2\lambda/2,$$

$$T_s = (T_2 - T_1)\sin 2\lambda + S\cos 2\lambda + (K_2\cos^2\lambda - K_1\sin^2\lambda)H,$$

$$Q_n = Q_1^*\cos\lambda + Q_2^*\sin\lambda,$$

$$M_t = M_1\cos^2\lambda + H\sin 2\lambda + M_2\sin^2\lambda,$$

$$M_s = (M_2 - M_1)\sin 2\lambda/2 + H\cos 2\lambda. \qquad /12/$$

У формулах /II/ T_t , T_s , Q_n - нормальне, зсувне і перерізуюче зусилля; M_t , M_s - згинальний і крутний моменти; λ - кут між лінією α_1 і нормаллю до границі Ω .

Система рівнянь /6/, /11/, /12/ доповнюється граничними умовами у переміщеннях і відповідними співвідношеннями між внутрішніми зусиллями, моментами та компонентами деформації. Для трансверсально-ізотропної оболонки вони наведені у [6] .

При використанні методу скінченних елементів основні співвідношення теорії оболонок зручно записувати в матричному вигляді. Для цього побудуємо матриці-стовпці зовнішнього навантаження P , переміщень U , деформацій $\mathcal{E}$, симетричних зусиль-моментів σ і номінальних зусиль-моментів σ^* :

$$P = (P_1, P_2, P_3, \mathring{m}_1, \mathring{m}_2)^T,$$

$$U = (u_1, u_2, W, \gamma_1, \gamma_2)^T,$$

$$\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_{12})^T,$$

$$\sigma = (T_1, T_2, S, Q_1, Q_2, M_1, M_2, H)^T,$$

$$\sigma^* = (T_1, T_2, S, Q_1^*, Q_2^*, M_1, M_2, H)^T. \qquad /13/$$

Тепер неважко побудувати матриці диференціальних операторів $\mathbf{C}_\Omega$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}_R$ і констант E_Ω , B , G_1 , G_2 , за допомогою яких повну систему рівнянь представимо у такому вигляді:

співвідношення між деформаціями та переміщеннями

$$\mathcal{E} = \mathbf{C}U + \frac{1}{2}(\mathbf{C}_\Omega U)^T_{\Omega} E_{\Omega} \mathbf{C}_\Omega U; \qquad /14/$$

рівняння рівноваги

$$C_R \sigma = P; \qquad /15/$$

закон пружності

$$\sigma = B\varepsilon; \qquad /16/$$

статичні та геометричні крайові умови

$$G_1\sigma^* = \sigma^b, \quad G_2 U = U^b. \qquad /17/$$

Тут $\sigma^b = (T_t^b, T_s^b, Q_n^{*b}, M_t^b, M_s^b)^T$ - матриця-стовпець заданих крайових зусиль-моментів; $U^b = (U_t^b, U_s^b, W^b, \gamma_t^b, \gamma_s^b)^T$ - крайові зміщення.

Задача /14/ - /17/ еквівалентна задачі мінімізації функціоналу

$$\Pi(U) = \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon^T(U) B\varepsilon(U) d\Omega - \int_\Omega U^T P d\Omega - \int_\Gamma (G_2 U)^T \sigma^b d\Gamma \qquad /18/$$

на множині функцій з простору $W_2^1(\Omega)$ [7], які задовольняють геометричні крайові умови. Для мінімізації нелінійного функціоналу /18/ використовуємо метод Ньютона. Розкладаємо функціонал /16/ в ряд Тейлора. Відкидаючи члени другого і вищих порядків малості, дістаємо варіаційне рівняння

$$\delta\Pi = \frac{1}{2}\int_\Omega [\varepsilon(U+\delta U) - \varepsilon(U)]^T B[\varepsilon(U+\delta U) - \varepsilon(U)] d\Omega +$$
$$+ \int_\Omega [\varepsilon(U+\delta U) - \varepsilon(U)]^T B\varepsilon(U) d\Omega - \int_\Omega (\delta U)^T P d\Omega -$$
$$- \int_\Gamma (G_2 \delta U)^T \sigma^b d\Gamma = 0. \qquad /19/$$

У варіаційне рівняння /19/ входять перші похідні від переміщень. Тому апроксимуючі функції методу скінченних елементів повинні задовольняти умови неперервності на міжелементній границі. Згідно з цим розіб"ємо область Ω на криволінійні чотирикутники. На кожному з них представимо невідомі функції переміщень за допомогою біквадратичних ізопараметричних апроксимацій у вигляді

$$U = Nq, \qquad /20/$$

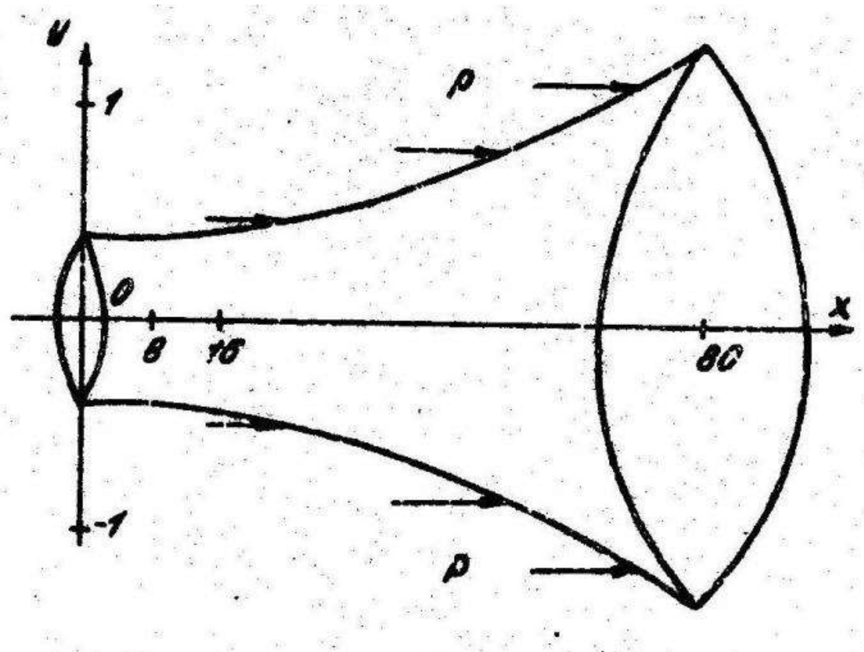

Рис. I

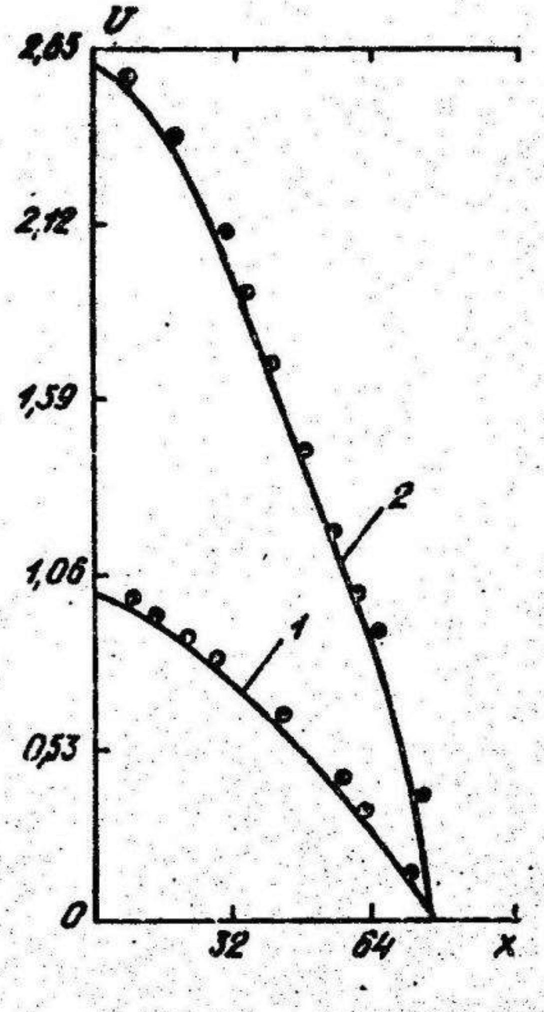

Рис. 2

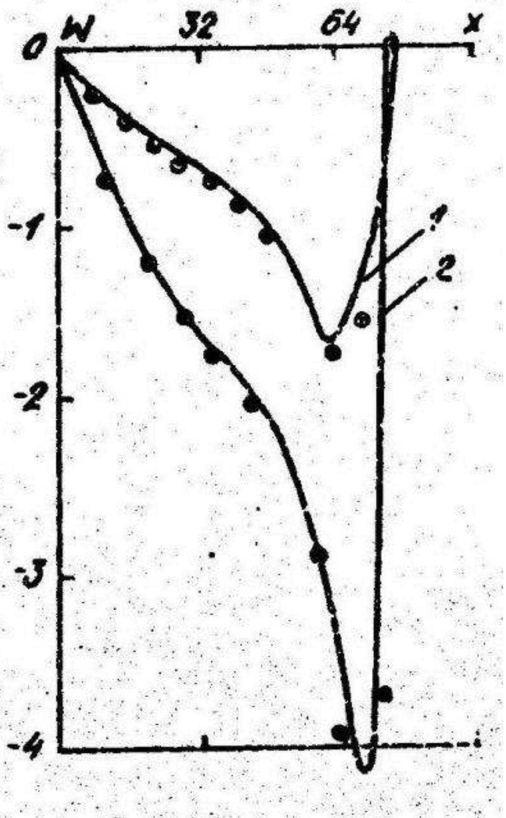

Рис. 3

де N - матриця з апроксимуючих функцій, q - вектор невідомих вузлових переміщень.

Підставляючи /14/, /20/ в /19/, приходимо до рекурентної схеми для розв"язку нелінійної системи рівнянь:

$$\int\limits_{\Omega}[(C+(C_{\Omega}Nq)_{8}^{T}E_{\Omega}C_{\Omega})N]^{T}B[C+(C_{\Omega}Nq)_{8}^{T}E_{\Omega}C_{\Omega}]N\Delta q\,d\Omega+$$

$$+\int\limits_{\Omega}[(C+(C_{\Omega}Nq)_{8}^{T}E_{\Omega}C_{\Omega})N]^{T}B[C+\tfrac{1}{2}(C_{\Omega}Nq)_{8}^{T}E_{\Omega}C_{\Omega}]Nq\,d\Omega-$$

$$-\int\limits_{\Omega}N^{T}P\,d\Omega-\int\limits_{\Gamma}(G_{2}N)^{T}\sigma^{b}\,d\Gamma=0. \qquad /21/$$

Якщо в /21/ прийняти $q=0$, то отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно Δq для розв"язку задач лінійної теорії оболонок.

Як приклад розглянемо оболонку, утворену обертанням ланцюгової лінії $y = a\,ch\,x/a$ /рис. 1/ навколо осі OX, серединна поверхня якої є поверхнею обертання змінної від"ємної гаусової кривини $K_1 = -a/y^2$. Контур оболонки $x=0$ вільний, а контур $x=b$ - жорстко закріплений. Оболонка деформується під дією рівномірно розподіленого осьового поверхневого навантаження P. Задачу розв"язували при таких вхідних даних: a = 40 см; b = 80 см; h = 2 см; P = 17 кг/см; модуль Юнга і коефіцієнт Пуасона відповідно дорівнюють $7\cdot10^5$ кг/см^2 і 0,3. На рис. 2,3 показані графіки переміщень u_1 та W серединної поверхні оболонки; 1, 2-числові розв"язки за лінійною та нелінійною теоріями. Точками позначено розв"язок, наведений у [2].

1. Галимов К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань, 1975. 2. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. К., 1983. 3. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Один подход к построению нелинейных уравнений уточненной теории оболочек // Докл. АН УССР. Сер. А. 1984. № 12. С.38-42. 4. Григолюк Э.И., Мамай В.И. Вариант уравнений для исследования нелинейного деформирования тонкостенных оболочек произвольного вида // Проблемы прочности. 1985. № 10. С.19-30. 5. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Л., 1948. 6. Пелех Б.Л. Обобщенная теория оболочек. Львов, 1978. 7. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М., 1977. 8. Шаповалов Л.А. Об одном простейшем варианте уравнений геометрически нелинейной теории тонких оболочек // Инж. журн. Механика твердого тела. 1968. № 1. С.56-62.

Стаття надійшла до редколегії 15.09.88