УДК 519.68

П.С.Венгерський

КОМПЛЕКС ПРОГРАМ РЕАЛІЗАЦІЇ ІНТЕРВАЛЬНИХ ІТЕРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ НА ЕС ЕОМ

Для проведення обчислень під час розв"язування багатьох математичних задач необхідно враховувати похибки різних типів /похибки вхідних даних, похибки методу, округлень/. Інтервальний аналіз, вперше введений Муром [8], дає змогу враховувати похибки обчислень. Однак при реалізації інтервальних арифметичних операцій на ЕОМ знову виникають похибки округлень. Це змушує апроксимувати операції точної інтервальної арифметики, тобто створити машинну арифметику, яка повинна гарантувати, що шуканий результат не виходить за межі одержаного інтервалу. Особливість реалізації машинної арифметики на ЕОМ серії ЕС полягає в тому, що при арифметичних обчисленнях розряди операндів, які виходять за розрядну сітку ЕОМ, відкидаються. У зв"язку з цим для поправки результатів арифметичних операцій ліва та права границі результуючого інтервалу зсуваються на одиницю молодшого розряду числа залежно від знаку та порядку цього числа.

Існує ряд комплексів програм для реалізації різних видів машинної інтервальної арифметики [7,10,11]. Створені навіть спеціальні алгоритмічні мови TRIPLEX-ALGOL-60, AUGMENT, I FORTRAN, але вони розраховані на конкретні ЕОМ або для розв"язування конкретного типу задач. Для машин серії ЕС розроблено транслятор обчислення алгебраїчних виразів [2] і комплекс програм для автоматизації доведень у математиці [4].

У наш комплекс програм входять програми, які виконують:

а/ арифметичні операції над інтервалами /додавання, віднімання, множення, ділення/;

б/ логічні операції над інтервалами;

в/ допоміжні операції /обчислення модуля інтервалу, ділення інтервалу навпіл, формування інтервалу/;

г/ різні типи поділу n -мірного паралелепіпеда [9];

д/ інтервальні розширення елементарних математичних функцій.

У комплекс входять також програми-алгоритми для розв"язування нелінійних систем рівнянь.

Нехай $I(R)$ - множина інтервалів на R. Тоді R_M - множина машинних чисел і, якщо

$$A=[\underline{a},\overline{a}]\in I(R),$$

то

$$\inf R_M < \underline{a} \leq \overline{a} \leq \sup R_M .$$

Позначаємо: $\downarrow x$ – число x, округлене з недостачею; $\uparrow x$ – число x, округлене з надлишком. Тоді правило запису інтервального числа A в R_M

$$\updownarrow : I(R)\ni A \to \updownarrow A = [\downarrow \underline{a}, \uparrow \bar{a}] =$$

$$= \{x\in R_M \mid \downarrow \underline{a} \leq x \leq \uparrow \bar{a}, \downarrow \underline{a}, \uparrow \bar{a}\in R_M\}.$$

Для операції $\updownarrow$ виконуються слідуючі властивості [3] :

1. $A\subset \updownarrow A, \ \forall A\in I(R)$.
2. Якщо $A\subset B$, то $\updownarrow A\subset \updownarrow B$.
3. Якщо $A,B\in I(R_M)$, $*\in\{+,-,\cdot,/\}$, то $\updownarrow (A*B)\subset I(R_M)$.
4. Якщо $A,B,C,D\subset I(R_M)$, то $(A\subset B, C\subset B)\Rightarrow \updownarrow (A*C)\subset \updownarrow (B*D)$.

З наведених властивостей випливає справедливість основної теореми інтервальної арифметики в $I(R_M)$ [3] . Інтервал $\updownarrow A$ дістають найбільш вузьким, якщо праві додатні та ліві від"ємні границі округляти з надлишком за модулем, а ліві додатні та праві від"ємні – з недостачею.

Для поправки границі результуючого інтервалу використовується програма

$$CORR(X),$$

де X – задане число, яке визначає границю інтервалу. Ця програма зсуває X до наступного машинного числа, тобто вона додає одиницю до молодшого розряду числа. Програма $CORR$ буде досить часто використовуватися в інших програмах, тому доцільно записати її на мові Асемблер. Всі наведені нижче програми написані на мові $FORTRAN$-IV і оформлені у вигляді підпрограм типу $SUBROUTINE$.

Для реалізації інтервальних операцій /додавання, множення, віднімання/ використовують програми:

ADD(X1,X2,Y1,Y2,Z1,Z2,IADDER), /1/

SUB(X1,X2,Y1,Y2,Z1,Z2,ISUBER), /2/

MUL(X1,X2,Y1,Y2,Z1,Z2,IMULER), /3/

де $[X1, X2]$, $[Y1, Y2]$ – вхідні інтервали операції; $[Z1, Z2]$ – результуючий інтервал операції; $IADDER, ISUBER, IMULER$ – показники правильності задання вхідних інтервалів. Показник дорівнює нулю, якщо $X1 \leq X2 \wedge Y1 \leq Y2$, і одиниці – в протилежному випадку. Інтервальне ділення виконує програма:

$$DIV(X1, X2, Y1, Y2, Z1, Z2, Z3, Z4, IDIVER, ITYPE, IPOKS),$$

де $X1$, $X2$, $Y1$, $Y2$, $Z1$, $Z2$, $IDIVER$ набувають описаних вище значень; $ITYPE$ – параметр, що дорівнює 1 за умови $0 \notin [Y1, Y2]$, і 2, якщо $Y1 \leq 0 \leq Y2$, $IPOKS$ – параметр, від якого залежить величина нескінченості /при $ITYPE = 2$/. При розв"язуванні системи нелінійних рівнянь роль параметра $IPOKS$ може відігравати показник степеня системи.

Знаходження інтервальних розширень елементарних математичних функцій здійснюють за програмами

$$SQR(X1, X2, Z1, Z2, ISQRER), \quad /4/$$

$$SQRT(X1, X2, Z1, Z2, ISQER), \quad /5/$$

$$LN(X1, X2, Z1, Z2, ILNER), \quad /6/$$

$$EXP(X1, X2, Z1, Z2, IEXPER), \quad /7/$$

$$SIN(X1, X2, Z1, Z2, ISINER), \quad /8/$$

$$COS(X1, X2, Z1, Z2, ICOSER), \quad /9/$$

$$ARTG(X1, X2, Z1, Z2, IARTER). \quad /10/$$

Математичний запис роботи програм /4/ – /10/ має вигляд

$$[Z1, Z2] = [X1, X2]^2 = \begin{cases} [X1^2, Y1^2], X1 \geq 0 \\ [0, (max(-X1, X2))^2], X1 \leq 0 \leq X2 \\ [X2^2, X1^2], X2 \leq 0; \end{cases}$$

$$[Z1, Z2] = \sqrt{[X1, X2]} = [\sqrt{X1}, \sqrt{X2}], \; X1 \geq 0;$$

$$[Z1, Z2] = \ln([X1, X2]) = [\ln(X1), \ln(X2)], \; X1 > 0;$$

$$[Z1,Z2]=\exp([X1,X2])=[\exp(X1),\exp(X2)];$$

$$[Z1,Z2]=\sin([X1,X2])=$$

$$=\begin{cases}[\sin(X1),\sin(X2)], & \langle X1/\pi-\frac{1}{2}\rangle=\langle X2/\pi-\frac{1}{2}\rangle \text{, обое непарні}\\ [\sin(X2),\sin(X1)], & \langle X1/\pi-\frac{1}{2}\rangle=\langle X2/\pi-\frac{1}{2}\rangle \text{, обое парні}\\ [-1,\max(\sin(X1),\sin(X2))], & \langle X1/\pi-\frac{1}{2}\rangle \text{, парне}\\ & \langle X2/\pi-\frac{1}{2}\rangle=\langle X1/\pi-\frac{1}{2}\rangle+1,\\ [\min(\sin(X1),\sin(X2)),1], & \langle X1/\pi-\frac{1}{2}\rangle \text{ непарне}\\ & \langle X2/\pi-\frac{1}{2}\rangle=\langle X1/\pi-\frac{1}{2}\rangle+1,\\ [-1,1], \text{ в інших випадках,} & \end{cases}$$

де $\langle X\rangle$ - найбільше ціле число менше або дорівнює X ;

$$[Z1,Z2]=\cos([X1,X2])=$$

$$=\begin{cases}[\cos(X1),\cos(X2)], & \langle X1/\pi\rangle=\langle X2/\pi\rangle \text{, обое непарні}\\ [\cos(X2),\cos(X1)], & \langle X1/\pi\rangle=\langle X2/\pi\rangle \text{, обое парні}\\ [-1,\max(\cos(X1),\cos(X2))], & \langle X1/\pi\rangle \text{ парне}\\ & \langle X2/\pi\rangle=\langle X1/\pi\rangle+1,\\ [\min(\cos(X1),\cos(X2)),1], & \langle X1/\pi\rangle \text{ непарне}\\ & \langle X2/\pi\rangle=\langle X1/\pi\rangle+1,\\ [-1,1] \text{, в інших випадках.} & \end{cases}$$

Тут $\langle X\rangle$ - найбільше ціле число менше або дорівнює X .

Серед логічних операцій над інтервалами слід відзначити операцію перетину двох інтервалів, яка реалізується програмою

$$PERER(X1,X2,Y1,Y2,Z1,Z2,IPERER,LOG), \qquad /11/$$

де $[X1,X2]$, $[Y1,Y2]$ -вхідні інтервали; $[Z1,Z2]$ - результуючий інтервал; $IPERER$ - показник правильності задання вхідних інтервалів; LOG - логічна змінна, яка вказу. на наявність точок в інтервалі $[Z1,Z2]$.

Серед допоміжних програм виділимо програму обчислення абсолютного значення інтервалу:

$$ABS(X1, X2, Z1, Z2, IABSER). \qquad /12/$$

В /12/ результат-інтервал обчислюється за формулою

$$[Z1, Z2] = ABS([X1, X2]) = \begin{cases} [X1, X2], X1 > 0 \\ [0, max(-X1, X2)], X1 \leq 0 \leq X2 \\ [-X2, -X1], X2 < 0. \end{cases}$$

Розглянемо певне число правил поділу навпіл n -мірного паралелепіпеда, що надзвичайно важливо при знаходженні допустимої області результату. При поділі X навпіл у напрямку i вважатимемо, що ділимо X у координатному напрямку x_i. Тоді можемо записати у вигляді об"єднання двох половинних областей $X^{(1)}$ і $X^{(2)}$, тобто

$$X^{(1)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}), \; X^{(2)} = (x_1^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}),$$

де $x_j^{(1)} = x_j^{(2)} = x_j$, для $\forall j \neq i$ і $x_i = x_i^{(1)} \cup x_i^{(2)} =$

$$= [\underline{x}_i, m(x_i)] \cup [m(x_i), \overline{x}_i].$$

Програми, що здійснюють різний вибір половинних інтервалів при поділі навпіл, мають вигляд

$$PODIL\ i\ (N, X1, X2, Y1, Y2, N1, N2, Z1, Z2, Z3, Z4, J1, J2), \qquad /13/$$

де $i \in \{1,2,3,4\}$ - різні правила поділу: $[X1, X2], [Y1, Y2]$ - вхідні інтервали; $[Z1, Z2]$, $[Z3, Z4]$ - інтервальні масиви, де зберігаються відповідно ліві та праві половини інтервалів, розмірності $N1$ і $N2$; J_1, J_2 - лічильники, які показують, скільки підінтервалів вибрано з векторів $[Z1, Z2], [Z3, Z4]$.

Реалізовані також програми алгоритмів розв"язання систем нелінійних рівнянь довільної розмірності різними версіями інтервального методу Ньютона, інтервального методу типу Рунге [5] та ін. [1,6]. Вони знаходять всі дійсні корені, в тому числі і кратні, в будь-якому наперед вказаному інтервалі. Для їхньої роботи необхідно задати вхідні інтервали, точність знаходження результуючого інтервалу і розмірність системи рівнянь. Сама система задається у програмі

$$SYSTM(N, Y, X1, X2, W1, W2, F),$$

де N - розмірність системи; Y - вектор середніх точок вхідних інтервалів $[X1, X2]$; $[W1, W2]$ - інтервальна матриця перших похідних; F - вектор рівнянь системи.

Для практичного використання описаного вище комплексу програм його бажано мати в бібліотеці об"єктних модулів.

1. Венгерский П.С., Кардаш А.И., Сеньо П.С. Вычислительные аспекты интервального метода типа Рунге //Применение вычислительной техники и математических методов в научных и экономических исследованиях. Тез. докл. К., 1988. С. 8. 2. Глазунов Н.М., Грегуль О.Е., Заика И.Б. COMIF - компилятор вычисления алгебраических выражений, учитывающий ошибки округления ЕС ЭВМ. К., 1985. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 7268-В. 3. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. Новосибирск. 1986. 5. Сеньо П.С. Построение интервального метода типа Рунге //Распараллеливание обработки информации. Тез. докл. Ч. 4. Львов, 1985. С.50-51. 6. Сеньо П.С. Интервальный итерационный процесс решения нелинейных систем уравнений //Применение вычислительной техники и математических методов в научных и экономических исследованиях. Тез. докл. К., 1988. С. 64. 7. Юлдашев З.Х. Алгоритмы реализации машинной интервальной арифметики для ЭЦВМ БЭСМ-6 // Алгоритмы и программы. М., 1976. № 2 /13/. С.64. 8. Moore R.E. Interval analysis. N.J.: Prentice-Hall, 1966. 9. Moore R.E. Interval methods for nonlinear systems // Fundamentals of numerical computer (computer-oriented numerical analysis) / Ed. By G. Alefeld, R.D. Grigorieff. Computing Supp 2. Wien-N.Y. 1980. P. 113-120. 10. Gibb A. Procedures for range arithmetic (algorithm 61) // Comm. ACM. 1961. Vol. 4. P. 319-320. 11. Yohe J.M. Software for interval arithmetic: a reasonably portable package // ACM. Trans. Math. Software. 1979. Vol. 5. P. 50-63

Стаття надійшла до редколегії 18.09.88