УДК 519.34:532.516

В.М.Зубов, Г.А.Шинкаренко

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ШТРАФУ ДЛЯ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ СТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ГІДРОДИНАМІКИ ЗІ ЗМІШАНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

В обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ / n = 2 або 3/ з ліпшицевою границею Γ розглянемо стаціонарні рівняння Нав"є-Стокса

$$(\bar{u}\cdot\bar{\nabla})\bar{u} - \mu\Delta\bar{u} + \operatorname{grad} p = \bar{f}, \qquad /1/$$

$$\operatorname{div}\bar{u} = 0 \qquad /2/$$

зі змішаними крайовими умовами

$$\bar{u} = 0 \quad \text{на } \Gamma_1, \qquad /3/$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left[-p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]\nu_j = \hat{p}_i \quad \text{на } \Gamma_2, \qquad /4/$$

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma,\ \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset,\ \Gamma_1 \neq \emptyset,\ \Gamma_2 = \emptyset.$$

Згідно з методом штрафу задача /1/ - /4/ апроксимується ε - задачею

$$(\bar{u}^{\varepsilon}\cdot\bar{\nabla})\bar{u}^{\varepsilon} - \mu\Delta\bar{u}^{\varepsilon} + \operatorname{grad} p^{\varepsilon} = \bar{f} \quad \text{в } \Omega, \qquad /5/$$

$$\varepsilon p^{\varepsilon} + \operatorname{div}\bar{u}^{\varepsilon} = 0 \quad \text{в } \Omega, \qquad /6/$$

$$\bar{u}^{\varepsilon} = 0 \quad \text{на } \Gamma_1, \qquad /7/$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left[-p^{\varepsilon}\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i^{\varepsilon}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right)\right]\nu_i = \hat{p}_i \quad \text{на } \Gamma_2, \qquad /8/$$

де $\varepsilon > 0$ - малий параметр.

Ставиться питання про збіжність послідовності узагальнених розв"язків $(\bar{u}^{\varepsilon}, p^{\varepsilon})$ ε-задач /5/ - /8/ при $\varepsilon \to 0$ до узагальненого розв"язку $(\bar{u}, p)$ задачі /1/ - /4/. У випадку крайової умови

$$\bar{u} = 0 \quad \text{на } \Gamma$$

це питання розглянуто в [1,2].

Узагальнені розв"язки $(\bar{u},p)\in V\times L^2(\Omega)$ та $(\bar{u}^\varepsilon,p^\varepsilon)\in V\times L^2(\Omega)$ задач /1/ – /4/ та /5/ – /8/ відповідно задовольняють рівняння

$$a(\bar{u},\bar{v})+b(p,\bar{v})+c(\bar{u},\bar{u},\bar{v})=\langle \bar{f},\bar{v}\rangle \quad \forall \bar{v}\in V, \qquad /9/$$

$$b(q,\bar{u})=0 \qquad \forall q\in L^2(\Omega) \qquad /10/$$

та

$$a(\bar{u}^\varepsilon,\bar{v})+b(p^\varepsilon,\bar{v})+c(\bar{u}^\varepsilon,\bar{u}^\varepsilon,\bar{v})=\langle \bar{f},\bar{v}\rangle \quad \forall \bar{v}\in V, \qquad /11/$$

$$-\varepsilon\cdot(p^\varepsilon,q)+b(q,\bar{u}^\varepsilon)=0 \qquad \forall q\in L^2(\Omega). \qquad /12/$$

Тут використані наступні позначення

$$V=(U)^n,\ U=\{v\in H^1(\Omega): v|_\Gamma=0\};$$

$$a(\bar{u},\bar{v})=\frac{\mu}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)d\Omega;$$

$$b(p,\bar{v})=-\int_\Omega p\,\mathrm{div}\,\bar{v}\,d\Omega;$$

$$c(\bar{u},\bar{v},\bar{w})=\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega u_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}w_i\,d\Omega.$$

Лема. Існують додатні сталі γ, K такі, що

$$a(\bar{v},\bar{v})\geq\gamma\mu|\bar{v}|_{(H^1(\Omega))^n}\ \forall\bar{v}\in V,$$

$$|c(\bar{u},\bar{v},\bar{w})|\leq K|\bar{u}|_{(H^1(\Omega))^n}|\bar{v}|_{(H^1(\Omega))^n}|\bar{w}|_{(H^1(\Omega))^n}\ \forall\bar{u},\bar{v},\bar{w}\in V.$$

Теорема 1. Нехай

$$|\bar{f}|^*=\sup_{\bar{v}\in V}\frac{|\langle\bar{f},\bar{v}\rangle|}{|\bar{v}|_{(H^1(\Omega))^n}}.$$

Якщо $4K|\bar{f}|^*<(\gamma\mu)^2$, тоді існують розв"язок $(\bar{u},p)$ задачі /9/, /10/, а також розв"язок $(\bar{u}^\varepsilon,p^\varepsilon)$ задачі /11/, /12/, причому

$$|\bar{u}|_{(H^1(\Omega))^n}\leq C,\ |\bar{u}^\varepsilon|_{(H^1(\Omega))^n}\leq C,\ C=\frac{4|\bar{f}|^*}{\gamma\mu}.$$

Доведення. Нехай $\bar{u} \in V^0 = \{\bar{v} \in V : div\,\bar{v} = 0$ в $L^2(\Omega)\}$. Розглянемо задачу знаходження вектора $\bar{w} \in V^0$ такого, що

$$a(\bar{w}, \bar{v}) + c(\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}) = \langle \bar{f}, \bar{v} \rangle \quad \forall \bar{v} \in V^0. \qquad /13/$$

За теоремою Лакса-Мільграма задача має єдиний розв"язок для довільного $\bar{u}$ з кулі

$$B = \left\{ \bar{u} \in V^0 : |\bar{u}|_{(H^1(\Omega))^n} < \frac{\gamma\mu}{K} \right\},$$

оскільки за лемою

$$a(\bar{v}, \bar{v}) + c(\bar{u}, \bar{v}, \bar{v}) \geq \gamma\mu\, |\bar{v}|^2_{(H^1(\Omega))^n} - K|\bar{u}|_{(H^1(\Omega))^n} |\bar{v}|^2_{(H^1(\Omega))^n}.$$

Таким чином, існує відображення $F : B \to V^0$, що ставить у відповідність кожному $\bar{u} \in B$ розв"язок $\bar{w} \in V^0$ задачі /13/. Використовуючи принцип Шаудера, можна довести, що F має нерухому точку в кулі

$$B_c = \left\{ \bar{u} \in B : |\bar{u}|_{(H^1(\Omega))^n} \leq C \right\}.$$

Звідси випливає існування розв"язку задачі /9/, /10/ з необхідною властивістю.

Для доведення існування розв"язку задачі /11/, /12/ розглядається допоміжна задача

$$\bar{u}^\varepsilon \in V, \qquad /14/$$

$$a(\bar{u}^\varepsilon, \bar{v}) + \varepsilon^{-1}(div\,\bar{u}^\varepsilon, div\,\bar{v}) + c(\bar{u}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon, \bar{v}) = \langle \bar{f}, \bar{v} \rangle \quad \forall \bar{v} \in V, \qquad /15/$$

розв"язок якої /якщо він існує/ задовольняє задачу /11/, /12/. Існування розв"язку задачі /14/, /15/ доводиться аналогічно попередньому з використанням теореми Лакса-Мільграма та принципу Шаудера.

Теорема 2. Нехай $8K|\bar{f}|^* < (\gamma\mu)^2$, тоді існує послідовність розв"язків $(\bar{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$ задач /11/, /12/, що при $\varepsilon \to 0$ збігається до деякого розв"язку $(\bar{u}, p)$ задачі /9/, /10/. При цьому має місце оцінка

$$|\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}|_{(H^1(\Omega))^n} + \|p^\varepsilon - p\|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon,$$

де $C>0$ – стала, що залежить тільки від $\mu, \gamma, K, |\bar{f}|^*$ та $\|p\|_{L^2(\Omega)}$.

Доведення. За теоремою 1 існують розв"язок $(\bar{u}, p)$ задачі /9/, /10/, а для довільного $\varepsilon>0$ – розв"язок $(\bar{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$ задачі /11/, /12/, причому

$$|\bar{u}|_{(H^1(\Omega))^n} \leq \frac{4|\bar{f}|^*}{\gamma\mu}, \quad |\bar{u}^\varepsilon|_{(H^1(\Omega))^n} \leq \frac{4|\bar{f}|^*}{\gamma\mu}. \qquad /16/$$

З /9/ та /11/ одержуємо

$$a(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}, \bar{v}) + b(p^\varepsilon - p, \bar{v}) + c(\bar{u}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon, \bar{v}) - c(\bar{u}, \bar{u}, \bar{v}) = 0. \qquad /17/$$

Використовуючи нерівність /1/

$$\sup_{\bar{v}\in V} \frac{b(q, \bar{v})}{|\bar{v}|_{(H^1(\Omega))^n}} \geq L\|q\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall q \in L^2(\Omega),\ L = const > 0,$$

знаходимо

$$\|p^\varepsilon - p\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 |\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}|_{(H^1(\Omega))^n}, \qquad /18/$$

де $C_1 = L^{-1}(2\mu + (\gamma\mu)^{-1} 8K|\bar{f}|^*)$.

З тотожності /17/ при $\bar{v} = \bar{u}^\varepsilon - \bar{u}$ випливає

$$\gamma\mu|\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}|^2_{(H^1(\Omega))^n} \leq \varepsilon\|p\|_{L^2(\Omega)} \|p^\varepsilon - p\|_{L^2(\Omega)} + K\left(|\bar{u}|_{(H^1(\Omega))^n} + |\bar{u}^\varepsilon|_{(H^1(\Omega))^n}\right)|\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}|^2_{(H^1(\Omega))^n}.$$

З огляду на /16/ та /18/ приходимо до оцінки

$$|\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}|_{(H^1(\Omega))^n} \leq C_2\varepsilon, \quad \|p^\varepsilon - p\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 C_2 \varepsilon,$$

де

$$C_2 = (\gamma\mu - (\gamma\mu)^{-1} 8K|\bar{f}|^*)^{-1} \|p\|_{L^2(\Omega)} C_1.$$

Звідси отримуємо твердження теореми.

1. Соболевский П.Е., Васильев В.В. Об одной ε-аппроксимации уравнений Навье-Стокса //Численные методы в механике сплошной среды. 1978. Т.9. № 5. 2. Bercovier M., Engelman M. A finite element for the numerical solution of viscous incompressible flows // J. Comput. Physics. 1979. Vol 30. P. 181-201.

Стаття надійшла до редколегії 03.09.88