

ISSN 0201-758X

ISSN 0320-6572

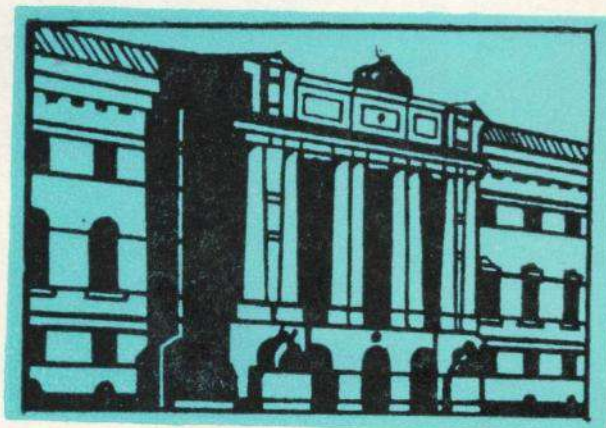
ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

ЗАДАЧІ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

СЕРІЯ
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК

31
1989



МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

Виходить з 1965 р.

ВИПУСК 31

ЗАДАЧІ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

ЛЬВІВ
ВИДАВНИЦТВО ПРИ ЛЬВІВСЬКОМУ
ДЕРЖАВНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ
ВИДАВНИЧОГО ОБ'ЄДНАННЯ

«ВИЩА ШКОЛА»

1989

УДК 518

В Вестнике помещены статьи по численным методам решения уравнений математической физики и задач оптимизации, статические и динамические задачи механики сплошной среды.

Для научных работников, преподавателей и студентов старших курсов.

Редакційна колегія: проф., д-р фіз.-мат. наук Я.Г. Савула /відповідальний редактор/, доц., канд. фіз.-мат. наук М.Я. Бартіш, проф., д-р техн. наук Д.В. Грилицький, доц., канд. фіз.-мат. наук Й.В. Людкевич, проф., д-р техн. наук Н.П. Флейшман, доц., канд. фіз.-мат. наук Ю.М. Щербина /відповідальний секретар/.

Адреса редакційної колегії: 290000 Львів, вул. Університетська, 1.
Львівський ун-т, кафедра прикладної математики

Редакція науково-технічної та
природничої літератури

В I602110000 - 045 Заповне
M225/04/-89

© Львівський державний
університет, 1989

Й.В.Людкевич, Р.Б.Скасків

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ
ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ
МЕТОДАМИ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ
ТА ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ВИПАДКУ
НЕЗАМКНУТИХ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ПОВЕРХОНЬ

Крайова задача з осьовою симетрією граничної поверхні, яку ми розглядаємо, є частковим випадком крайових задач для рівняння теплопровідності у випадку незамкнутих граничних поверхонь.

1. Нехай у тривимірному просторі R^3 задано осесиметричну гладку поверхню S . У циліндрі $U = D_\rho \times (0, \infty)$, $D_\rho = R^3 \setminus S$ необхідно знайти розв'язок $u(M, t) \in C^2(D_\rho) \cap C^1(\bar{U})$ рівняння теплопровідності

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad /1/$$

який задовольняє однорідну початкову умову

$$u|_{t=0} = 0 \quad /2/$$

і граничну умову Діріхле

$$u|_S = f(M, t), \quad M \in S, \quad t \geq 0. \quad /3/$$

Вважаємо, що гранична та початкова умови узгоджені

$$u|_{t=0} = f(M, 0), \quad M \in S, \quad /4/$$

а розв'язок даної задачі існує єдиний.

З допомогою інтегрального перетворення Чебишева-Лагерра за часом нестационарну крайову задачу /1/-/4/ можна звести до системи стаціонарних граничних задач [1]:

$$\Delta u_n - \alpha \sum_{m=0}^n u_m = 0, \quad /5/$$

$$u_n|_S = f_n(M), \quad M \in S, \quad n=0, 1, \dots, \quad /6/$$

$$\text{де } u_n(M) = \int_0^{\infty} u(M, t) \cdot e^{-\alpha t} \cdot L_n(\alpha t) dt;$$

$$f_n(M) = \int_0^{\infty} f(M, t) \cdot e^{-\alpha t} \cdot L_n(\alpha t) dt,$$

u_n, f_n - зображення розв'язку та граничного значення вихідної крайової задачі; L_n - поліноми Чебишева-Лагерра n -го степеня; α - параметр.

Система /5/ складається з еліптичних рівнянь. Можна показати, що коли послідовність функцій $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ - фундаментальний розв'язок цієї системи, то потенціал простого шару

$$u_n(M) = \iint_S \sum_{m=0}^n g_m(\rho) \cdot G_{n-m}(M, \rho) dS_{\rho}, \quad n=0,1,\dots, \quad /7/$$

де g_m - довільні функції, достатньо гладкі для того, щоб інтеграли /7/ існували, що також задовольняє її. Оскільки для довільних функцій $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ система граничних задач /5/ - /6/ має трикутний вигляд, то функції u_n можна визначати починаючи з першої задачі / $n=0$ /, диференціальне рівняння якої однорідне, послідовно переходячи до розв'язування наступних.

2. Нехай поверхня S та граничне значення f симетричні відносно осі Oz /у декартовій системі координат/. Тоді, очевидно, що й розв'язки задач /1/ - /4/ та /5/ - /6/ не будуть залежати від азимутальної координати φ у циліндричній системі координат $\{\bar{r}, \bar{z}, \varphi\}$. Тому ці розв'язки шукатимемо лише при $\varphi=0$.

Нехай твірна L незамкнутої поверхні S задана у параметричному вигляді:

$$\begin{cases} \tau = \tau(\tau), & \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2, \\ \bar{z} = \bar{z}(\tau). \end{cases}$$

Тоді розв'язок n -ї крайової задачі /5/ - /6/ в довільній точці $\{\bar{r}, \bar{z}\}$ області $D_{\bar{e}}$ згідно з методом нелінійних параметрів [2] шукатимемо як

$$\begin{aligned} u_n(\bar{r}, \bar{z}) = & \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{m=0}^n g_m(\tau) \varphi_{n-m}(\bar{r}, \bar{z}, \tau) D(\tau) d\tau + \\ & + \sum_{\nu=1}^N \sum_{m=0}^n C_{\nu}^{(m)} \varphi_{n-m}(\bar{r}, \bar{z}, \tau_{\nu}) \cdot D(\tau_{\nu}), \quad n=0,1,\dots. \end{aligned} \quad /8/$$

де g_n - невідома густина; g_m ($m = \overline{0, n-1}$) - густини, визначені на попередніх етапах розв'язування;

$$\varphi_k(\bar{z}, \bar{z}, \tau) = \int_0^{\pi/2} G_k(R(\bar{z}, \bar{z}, \tau, y)) dy; \quad G_k (k = \overline{0, n}) -$$

фундаментальні розв'язки диференціальних рівнянь /5/.

Тут
$$G_k(R) = \sum_{m=0}^k (-1)^m \frac{k!}{(m!)^2 (k-m)!} E_m(R),$$

де

$$E_m(R) = (2m-3) E_{m-1}(R) / 2R + R^2 E_{m-2}(R) / 4R,$$

а

$$E_0(R) = e^{-R\sqrt{2}} / 4\pi R, \quad E_1(R) = e^{-R\sqrt{2}} / 8\pi\sqrt{2},$$

$$R(\bar{z}, \bar{z}, \tau, y) = [\bar{z}^2 + z^2(\tau) - 2\bar{z}z(\tau)\cos y + (\bar{z} - z(\tau))^2]^{1/2}$$

відстань між точкою спостереження $[\bar{z}, \bar{z}]$ і точкою інтегрування $[z(\tau), z(\tau)]$; $D(\tau) = [(z'(\tau))^2 + (\bar{z}'(\tau))^2]^{1/2}$;

C_v - невідомі інтенсивності у кутових точках, які враховують особливість у густині; N_1 - їх кількість; $C_v^{(m)}$ ($m = \overline{0, n-1}$) - інтенсивності, обчислені на попередніх етапах розв'язування.

Задовольняючи граничні умови /6/, отримуємо інтегральні рівняння Фредгольма 1-го роду:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} g_n(\tau) \varphi_0(\bar{z}, \bar{z}, \tau) D(\tau) d\tau + \sum_{v=1}^{N_1} C_v^n \varphi_0(\bar{z}, \bar{z}, \tau_v) D(\tau_v) = F_n(\bar{z}, \bar{z}), \quad /9/$$

де
$$F_n(\bar{z}, \bar{z}) = f_n(\bar{z}, \bar{z}) - \sum_{m=0}^{n-1} \left(\sum_{v=1}^{N_1} C_v^{(m)} \varphi_{n-m}(\bar{z}, \bar{z}, \tau_v) D(\tau_v) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} g_m(\tau) \varphi_{n-m}(\bar{z}, \bar{z}, \tau) D(\tau) d\tau \right).$$

Під час розв'язування рівнянь /9/ невідомі густини g_n зображали у вигляді суми дробово-раціональних функцій [2]:

$$g_n(\tau) = \sum_{k=1}^N a_{kn} d_k(\tau), \quad /10/$$

де a_{kn} - невідомі коефіцієнти; $d_k(\tau) = b_k / [\delta_k^2 + (\tau - \tau_k)^2]$ - дробово-раціональні функції; τ_k - точки побудови густини; δ_k - нелінійні параметри.

Граничні умови /6/ задовольняли у точках колокації на допоміжній твірній L' , достатньо близькій до твірної L . Таким чином отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь з добре зумовленою матрицею. Вигляд цієї матриці для кожної із задач /5/ - /6/ один і той же. Після розв'язування отриманої системи лінійних алгебраїчних рівнянь значення розв'язку в довільній точці $(\bar{z}, \bar{z})$ області D_e знаходили за формулою /8/.

Як відомо [1], оригінал через трансформанти однозначно можна зобразити рядом

$$u(\bar{z}, \bar{z}, t) = \mathcal{E} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\bar{z}, \bar{z}) \cdot L_n(\mathcal{E}t) \quad /11/$$

Збіжність цього ряду за часом нерівномірна на всій півосі $t \geq 0$. Але, як засвідчив обчислювальний експеримент, за допомогою параметра $\mathcal{E}$ можна керувати швидкістю збіжності ряду /11/.

Як числовий розв'язок брали часткову суму /11/:

$$u_N(\bar{z}, \bar{z}, t) = \mathcal{E} \sum_{n=0}^N u_n(\bar{z}, \bar{z}) \cdot L_n(\mathcal{E}t). \quad /12/$$

Обчислення нових коефіцієнтів u_n ряду /11/ проводили доти, поки u_N з достатньою точністю не задовольняло початкову умову /2/ вихідної задачі.

3. Описаний підхід до розв'язування нестационарної задачі /1/ - /4/ реалізовано у вигляді комплексу програм на мові Фортран-IV. Комплекс програм апробовано на ряді прикладів.

Приклад 1. Обчислити температурне поле за межами осесиметричної сфери одиничного радіуса, коли граничне значення не залежить від просторових координат і має вигляд $f(t) = t \cdot e^{-t}$.

Чисельний розв'язок одержано при $\bar{N} = 18$ і $N = 12$. Для точок спостереження на осі $OZ (Z = 1, 01 + i/p - 1/0,2$, де p - номер лінії/, на рис. 1 показано графіки чисельних розв'язків. При цьому похибка задоволення граничної умови не перевищувала 0,004, а початкової - 0,006.

Приклад 2. Обчислити температурне поле за межами еліпсоїда обертання, коли граничне значення має вигляд

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t > 2, \\ (4 - t^2) \cdot t/4, & 0 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

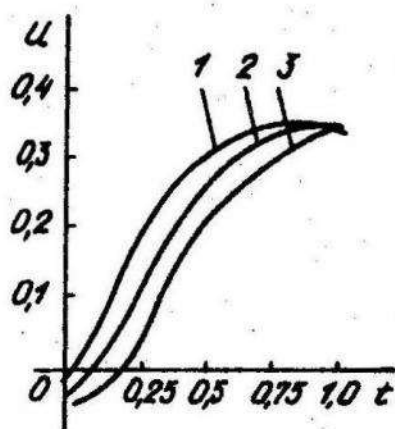


Рис. 1

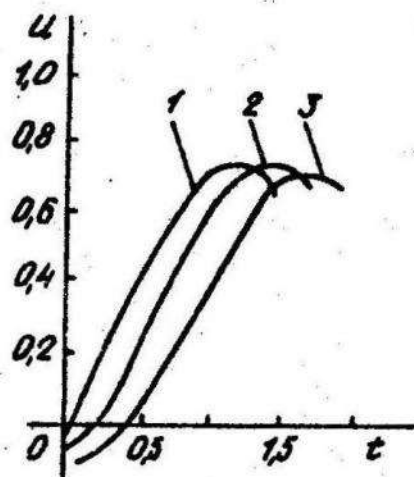


Рис. 2

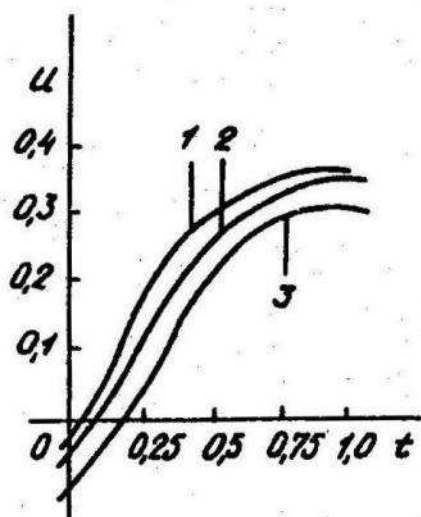


Рис. 3

Чисельний розв'язок отримано при $\bar{N}=18$ і $N=12$ у точках спостереження на осі OZ $z/Z = 2,01 + (p-1) \cdot 0,2$, де p - номер лінії /рис. 2/. Точність задоволення граничного значення не перевищувала 0,05, а початкового - 0,001.

Приклад 3. Розглянемо задачу, аналогічну тій, яка розглядалась в прикладі 1, але для випадку, коли гранична поверхня незамкнута і є одиничною сферою зі зрізаним полюсом.

Графіки чисельних розв'язків цієї задачі для різних діаграм зображено на рис. 3 /номер лінії відповідає значенню $\tau_1 : \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}$ /. Для точки спостереження на осі OZ $z=1,01$. Точність задоволення початкових умов при $N=18$ і $N=12$ не перевищувала 0,05.

1. Г а л а з ю к В.А. Метод поліномів Чебишева-Лагерра в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку із постійними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1981. 2. Л ю д к е в и ч И.В., М у з ы ч у к А.Е. Численное решение граничных задач для уравнения $\Delta u - \alpha u = 0$ в случае незамкнутых поверхностей. Львов. 1982. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 3658-82.

Стаття надійшла до редколегії 05.03.88

УДК 517.949:517.956

М.Д.Коркуна, А.М.Кузик, І.І.Чулик

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СУМАРНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Розглянемо крайову задачу [2]

$$c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left(z \lambda(u) \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

$$(z, z, t) \in Q_T, u(z, z, t) \Big|_{t=0} = u_0, (z, z) \in \Omega \quad /1/$$

при $z = 0$:

$$c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial z} \right);$$

$$u(z, z, t) \Big|_{z=a} = u_0, u(z, z, t) \Big|_{z=0} = u_0, \lambda(u) \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=H} = q, \quad /2/$$

де $\Omega = \{(z, z) : 0 < z < a, 0 < z < H\}$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$;

$$q = \begin{cases} q_0, & z \leq z_0, \\ 0, & z > z_0, \end{cases} \quad q_0, u_0 - \text{константи.}$$

На відрізку $[0, T]$ введемо рівномірну сітку

$$\bar{\omega}_\tau = \left\{ t = t_j = j\tau : j = 0, 1, \dots, K, \tau = \frac{T}{K} \right\}.$$

До задачі /1/, /2/ застосовуємо метод сумарної апроксимації, беручи за основу адитивну модель з розпаралелюванням [1]. Згідно з цим методом розв'язування задачі /1/, /2/ зводиться до відшукування розв'язку системи

$$\begin{cases} \frac{1}{2} C(v_1) \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} (z \lambda(v_1) \frac{\partial v_1}{\partial z}), & t_j < t \leq t_{j+1}, (z, z) \in \Omega, \\ \frac{1}{2} C(v_2) \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (\lambda(v_2) \frac{\partial v_2}{\partial z}), & t_j < t \leq t_{j+1}, (z, z) \in \Omega, \end{cases} \quad /3/$$

$$j = \overline{0, K-1}$$

при початкових і крайових умовах

$$v_\alpha(z, z, t) \Big|_{t=0} = u_0, v_\alpha(z, z, t_j) = \bar{v}(z, z, t_j), \alpha = 1, 2, \quad /4/$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} C(v_1) \frac{\partial v_1}{\partial t} = 2 \frac{\partial}{\partial z} (\lambda(v_1) \frac{\partial v_1}{\partial z}), & t_j < t \leq t_{j+1}, 0 < z < H, \\ \frac{1}{2} C(v_2) \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (\lambda(v_2) \frac{\partial v_2}{\partial z}), & t_j < t \leq t_{j+1}, 0 < z < H, \end{cases} \quad /5/$$

$$v_1(z, z, t) \Big|_{z=a} = u_0, \quad v_2(z, z, t) \Big|_{z=0} = u_0, \lambda(v_2) \frac{\partial v_2}{\partial z} \Big|_{z=H} = q$$

при $z = 0$.

За наближений розв'язок задачі /1/, /2/ при $t \in \omega_\tau$ приймемо функцію $\bar{v}(z, z, t) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 v_\alpha(z, z, t)$, де $z \in [0, a], z \in (0, H)$.

В області Ω введемо рівномірну сітку

$$\bar{\omega}_h = \left\{ (z_1, z_2) = (i_1 h_1, i_2 h_2) : i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, N_1 h_1 = a, N_2 h_2 = H, \alpha = 1, 2 \right\}.$$

Беручи за основу адитивну модель методу сумарної апроксимації /3/ - /5/, побудуємо економну різницеву схему [3]:

$$\frac{1}{2} C(\bar{y}_{ik}^j) \frac{y_{i,k}^{j+1} - \bar{y}_{i,k}^j}{\tau} = \frac{1}{z_i} \left(z_i \lambda \left(\frac{\bar{y}_{i,k}^j + \bar{y}_{i-1,k}^j}{2} \right) y_{i,z}^{j+1} \right) \Big|_{z_i}^{z_{i-1}}, \quad /6/$$

$$\frac{1}{2} C(\bar{y}_{i,k}^j) \frac{y_{2,i,k}^{j+1} - \bar{y}_{i,k}^j}{\tau} = \left(\lambda \left(\frac{\bar{y}_{i,k}^j + \bar{y}_{i,k+1}^j}{2} \right) y_{2,i}^{j+1} \right) z, k=1, N_2-1, j=0, K-1,$$

$$y_{2,i,k}^0 = U_0, \quad \bar{y}_{i,k}^j = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 y_{\alpha,i,k}^j,$$

/7/

$$C(\bar{y}_{0,k}^j) (y_{1,0,k}^{j+1} - \bar{y}_{0,k}^j) = \frac{8\tau}{h^2} \lambda \left(\frac{\bar{y}_{1,k}^j + \bar{y}_{0,k}^j}{2} \right) (y_{1,1,k}^{j+1} - y_{1,0,k}^{j+1}),$$

$$y_{1,N_1,k}^{j+1} = U_0, \quad y_{2,i,0}^{j+1} = U_0,$$

/8/

$$y_{2,i,N_2}^{j+1} = \frac{2q h_2}{3\lambda(\bar{y}_{i,k}^j)} + \frac{4}{3} y_{2,i,N_2-1}^{j+1} - \frac{1}{3} y_{2,i,N_2-2}^{j+1}.$$

При фіксованому $j = \overline{0, K-1}$ кожне рівняння системи /6/ зводиться до триточкового різницевого рівняння і його можна розв'язати методом прогонки.

Для реалізації різницевої схеми /6/ - /8/ при $T = 40$ з кроком $h_1 = h_2 = 0,5 \text{ мм}$, $\Delta t = 0,01 \text{ с}$ складена програма на мові Фортран. Параметрам надані числові значення, які трапляються в практиці: $q_0 = 2,25 \text{ ккал/ч} \cdot \text{м}^2$, $z_0 = 2 \text{ мм}$, $U_0 = 100^\circ$.

Наведемо результати обчислень на ЕОМ:

$t, \text{с}$	Неявна схема	Економна схема
0,25	1054,7	1062,1
0,50	1170,9	1172,4
0,75	1220,2	1238,9
1,00	1236,9	1294,9
1,25	1243,4	1325,3
1,50	1246,0	1346,7
1,75	1247,1	1364,3
2,00	1247,6	1375,9

В першій колонці наведено чисельний розв'язок задачі /1/, /2/, отриманий за неявною різницевою схемою. При реалізації даної схеми використовували метод матричної прогонки. Друга і третя колонки - це результати обчислень з допомогою економічної різницевої схеми методу сумарної апроксимації /6/ - /8/. Причому, як випливає з результатів обчислень, за неявною схемою отримуємо

чисельний розв'язок задачі /1/, /2/ з надстачею, а за схемою /6/ - /8/ - з надлишком.

1. Гордєзiani Д.Г., Самарский А.А. Некоторые задачи термоупругости пластин и оболочек и метод суммарной аппроксимации // Комплексный анализ и его приложения. М., 1978. С.173-186. 2. Коркуна М.Д. Решение нелинейной задачи теплопроводности при интенсивном локальном и поверхностном нагреве методом сеток // Мат. методы и физ.-мех. поля. 1982. Вып.15. С.32-84. 3. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., 1963.

Стаття надійшла до редколегії 30.06.87

УДК 517.944:947

Марія Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко

ЕКВІВАЛЕНТНА ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ДЛЯ ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВНИХ СИСТЕМ

Наведемо наближені схеми розв'язування нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, що ґрунтуються на їх заміні лінійними рівняннями спеціального вигляду, як продовження публікацій [1-3].

1. Розглянемо задачу Коші

$$u'' + f(u)u' + g(u) = h(t), \quad /1/$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u'|_{t=0} = u_1, \quad /2/$$

де u_0, u_1 - сталі, причому u_0 відмінна від нуля /цього завжди можна досягнути з допомогою заміни шуканого розв'язку/; $f(u), h(t)$ - неперервні функції своїх аргументів, а $g(u)$ задовольняє умову Ліпшиця зі сталою K_g .

Рівняння /1/ перепишемо у такому еквівалентному вигляді:

$$u'' + \frac{d}{dt} F(u) + g(u) = h(t), \quad /1'/$$

де

$$F(u) = \int_{u_0}^{u(t)} f(\tau) d\tau \quad (u_0 = \text{const}). \quad /3/$$

Так визначена функція $F(u)$ задовольнятиме умову Ліпшиця зі сталою K_F .

Наближений розв'язок задачі /1/ - /2/ визначимо як розв'язок наступної лінійної задачі Коші:

$$\tilde{u}'' + \kappa_1 \tilde{u}' + \kappa_2 \tilde{u} = h(t), \quad /4/$$

$$\tilde{u}|_{t=0} = u_0, \quad \tilde{u}'|_{t=0} = u_1, \quad /5/$$

де

$$\kappa_1 = \frac{F(u_0)}{u_0}, \quad \kappa_2 = \frac{g(u_0)}{u_0}. \quad /6/$$

Оцінимо близькість розв'язків $u(t)$, $\tilde{u}(t)$ задач /1/ - /2/ та /4/ - /5/, припускаючи, що $\tilde{u}(t)$ належить області визначення функцій $F(u)$ і $g(u)$. Зобразимо їх різницю у такому вигляді:

$$u(t) - \tilde{u}(t) = - \int_0^t (t-\tau) \left\{ \frac{d}{d\tau} F(u(\tau)) + g(u(\tau)) - \kappa_1 \tilde{u}'(\tau) - \kappa_2 \tilde{u}(\tau) \right\} d\tau. \quad /7/$$

Після інтегрування за частинами /7/ набирає вигляду

$$u(t) - \tilde{u}(t) = - \int_0^t \left\{ F(u(\tau)) - \kappa_1 \tilde{u}(\tau) - [g(u(\tau)) - \kappa_2 \tilde{u}(\tau)](t-\tau) \right\} d\tau. \quad /8/$$

Враховуючи /6/, маємо

$$|F(u) - \kappa_1 \tilde{u}| \leq K_F |u - \tilde{u}| + \left[\frac{|F(u_0)|}{|u_0|} + K_F \right] \cdot |\tilde{u} - u_0|, \quad /9/$$

$$|g(u) - \kappa_2 \tilde{u}| \leq K_g |u - \tilde{u}| + \left[\frac{|g(u_0)|}{|u_0|} + K_g \right] \cdot |\tilde{u} - u_0|. \quad /10/$$

Враховуючи /9/ та /10/, із /8/ одержуємо нерівність

$$\max_{t \in [0, t_1]} |u(t) - \tilde{u}(t)| \leq \frac{A}{B} \max_{t \in [0, t_1]} |\tilde{u}(t) - u_0|, \quad /11/$$

де

$$A = \frac{|F(u_0)|}{|u_0|} + |t_1| K_F + t_1^2 \left[\frac{|g(u_0)|}{|u_0|} + K_g \right];$$

$$B = 1 - |t_1| K_F - t_1^2 K_g.$$

При цьому значення t , вибираємо так, щоб завжди була виконана умова $B > 0$. Різницю $u'(t) - \tilde{u}'(t)$ легко оцінити на основі аналогічних міркувань.

2. Розглянемо більш загальне нелінійне диференціальне рівняння

$$u'' + f(u)\varphi(u') + g(u) = h(t), \quad /12/$$

де f, φ, g задовольняють умову Ліпшиця зі сталими K_f, K_φ, K_g ; $h(t)$ - неперервна функція.

Нехай $\tilde{u}(t)$ - розв'язок такої лінійної задачі Коші:

$$\tilde{u}'' + K_1 K_3 \tilde{u}' + K_2 \tilde{u} = h(t),$$

$$\tilde{u}|_{t=0} = u_0, \quad \tilde{u}'|_{t=0} = u_1, \quad /13/$$

де u_0, u_1 - відмінні від нуля сталі; K_i ($i=1,2,3$) визначають рівності

$$K_1 = \frac{\varphi(u_1)}{u_1}, \quad K_3 = f(u_0), \quad K_2 = \frac{g(u_0)}{u_0}. \quad /14/$$

Припускаючи, що розв'язок $\tilde{u}(t)$ задачі /13/ належить області визначення функцій f, φ, g , можна легко оцінити його близькість до розв'язку $u(t)$ вихідної задачі Коші /12/ - /2/. Насправді для відповідних різниць $u(t) - \tilde{u}(t)$, $u'(t) - \tilde{u}'(t)$ маємо очевидні рівності:

$$u(t) - \tilde{u}(t) = - \int_0^t (t-\tau) \{ f(u(\tau))\varphi(u'(\tau)) - K_1 K_3 \tilde{u}'(\tau) + g(u(\tau)) - K_2 \tilde{u}(\tau) \} d\tau, \quad /15/$$

$$u'(t) - \tilde{u}'(t) = - \int_0^t \{ f(u(\tau))\varphi(u'(\tau)) - K_1 K_3 \tilde{u}'(\tau) + g(u(\tau)) - K_2 \tilde{u}(\tau) \} d\tau. /16/$$

Із /14/ та припущень відносно f, φ, g випливає нерівність

$$|f(u)\varphi(u') - K_1 K_3 \tilde{u}'| \leq K_f K_\varphi |u - u_0| |u' - u_1| + K_f |\varphi(u_1)| |u - u_0| + K_\varphi |f(u_0)| |u' - u_1| + \frac{|f(u_0)| |\varphi(u_1)|}{|u_1|} |\tilde{u}' - u_1|.$$

Звідси маємо

$$|f(u)\varphi(u') - K_f K_\varphi \tilde{u}'| \leq \frac{1}{2} K_f K_\varphi (|u - \tilde{u}|^2 + |u' - \tilde{u}'|^2) + a|u - \tilde{u}| + b|u' - \tilde{u}'| + \\ + c|\tilde{u} - u_0|^2 + d|\tilde{u}' - u_1|^2 + e|\tilde{u} - u_0| + h|\tilde{u}' - u_1|,$$

/17/

причому сталі a, b, c, d, e, h виписуються явно на основі звичайних міркувань і залежать від $K_f, K_\varphi, |f(u_0)|, |\varphi(u_1)|$ та $|u_1|$. Формули /10/, /17/, /15/ та /16/ дають змогу оцінити

$\max_{t \in [0, t_1]} |u(t) - \tilde{u}(t)|, \max_{t \in [0, t_1]} |u'(t) - \tilde{u}'(t)|$ через $|\tilde{u} - u_0|$ та $|\tilde{u}' - u_1|$ при відповідному виборі t_1 . Однак остаточні формули тут не наводимо внаслідок їхньої громіздкості. Більш прості оцінки можна одержати у випадку обмеженості однієї з функцій $f(u)$ або $\varphi(u')$. А саме, якщо $f(u)$ задовольняє умову Ліпшиця зі сталою K_f , крім того, існує така стала C , коли $|f(u)| \leq C$ для всіх u з області визначення цієї функції, то

$$|f(u)\varphi(u') - K_f K_\varphi \tilde{u}' + g(u) - K_g \tilde{u}| \leq \\ \leq C K_\varphi |u' - \tilde{u}'| + [K_g + |\varphi(u_1)| K_f] |u - \tilde{u}| + \\ + [C K_\varphi + \left| \frac{f(u_0) \cdot \varphi(u_1)}{u_1} \right|] |\tilde{u}' - u_1| + [K_g + \left| \frac{g(u_0)}{u_0} \right| + |\varphi(u_1)| K_f] |\tilde{u} - u_0|.$$

Із /15/ та /16/ одержуємо

$$\max_{t \in [0, t_1]} |u(t) - \tilde{u}(t)| \leq t_1^2 \max_{t \in [0, t_1]} \left\{ C K_\varphi |u' - \tilde{u}'| + [K_g + |\varphi(u_1)| K_f] |u - \tilde{u}| + \right. \\ \left. + [C K_\varphi + \left| \frac{f(u_0) \cdot \varphi(u_1)}{u_1} \right|] |\tilde{u}' - u_1| + [K_g + \left| \frac{g(u_0)}{u_0} \right| + |\varphi(u_1)| K_f] |\tilde{u} - u_0| \right\}.$$

$$\max_{t \in [0, t_1]} |u'(t) - \tilde{u}'(t)| \leq t_1 \max_{t \in [0, t_1]} \left\{ C K_\varphi |u' - \tilde{u}'| + [K_g + |\varphi(u_1)| K_f] |u - \tilde{u}| + \right. \\ \left. + [C K_\varphi + \left| \frac{f(u_0) \cdot \varphi(u_1)}{u_1} \right|] |\tilde{u}' - u_1| + [K_g + \left| \frac{g(u_0)}{u_0} \right| + |\varphi(u_1)| K_f] |\tilde{u} - u_0| \right\}.$$

/19/

Із /19/ маємо

$$\max_{t \in [0, t_1]} |u'(t) - \tilde{u}'(t)| \leq \frac{t_1}{1 - t_1 C K_\varphi} \max_{t \in [0, t_1]} \{ [K_g + K_f |\varphi(u_1)|] \cdot |u - \tilde{u}| + [C K_\varphi + \left| \frac{f(u_0) \varphi(u_1)}{u_1} \right|] |\tilde{u} - u_1| + [K_g + \left| \frac{g(u_0)}{u_0} \right| + K_f |\varphi(u_1)|] |\tilde{u} - u_0| \}.$$

Тому /18/ приводить до оцінки

$$\max_{t \in [0, t_1]} |u(t) - \tilde{u}(t)| \leq \frac{t_1^2}{1 - t_1 C K_\varphi - t_1^2 [K_g + K_f |\varphi(u_1)|]} \times$$

$$\times \max_{t \in [0, t_1]} \{ [C K_\varphi + \left| \frac{f(u_0) \varphi(u_1)}{u_1} \right|] |\tilde{u}' - u_1| + [K_g + \left| \frac{g(u_0)}{u_0} \right| + K_f |\varphi(u_1)|] \times$$

$$\times |\tilde{u} - u_0| \} \quad /20/$$

При виведенні оцінки /20/ припускали, що $t_1, C, K_\varphi, K_f, K_g$ задовольняють такі дві умови:

$$1 - t_1 C K_\varphi > 0,$$

$$1 - t_1 C K_\varphi - t_1^2 [K_g + K_f |\varphi(u_1)|] > 0.$$

Аналогічну нерівність можна дістати і для $\max_{t \in [0, t_1]} |u' - \tilde{u}'|$.

На закінчення відзначимо, що в змога аналогічним шляхом розглянути випадок обмеженості функції $\varphi(u)$.

1. Мартиненко Марія Д., Мартиненко Михайло Д. Модифікований метод еквівалентної лінеаризації для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1987. Вип.27. С.55-57. 2. Мартиненко Марія Д., Мартиненко Михайло Д. Про модифікований метод еквівалентної лінеаризації для звичайних нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1988. Вип.28. С.40-42. 3. Мартиненко Марія Д., Мартиненко Михайло Д. Еквівалентна лінеаризація для рівнянь Льюна // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1988. Вип.28. С.42-45.

Стаття надійшла до редколегії 31.08.87.

Марія Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко

МЕТОД СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ ДЛЯ ОДНІСІ НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ

Розглянемо задачу про знаходження розв'язку типу плоскої хвилі для рівняння Фішера-Колмогорова-Петровського-Піскунова:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Ku(1-u) + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad /1/$$

де K, D - додатні сталі; $-\infty < x < +\infty$, $0 < t < +\infty$. Рівняння /1/, запропоноване в 1937 р. [3,4] як найпростіша логістична модель росту популяції, потім з'явилося у задачі про поширення полум'я [1] та інших задачах про хвильові процеси у збудливих середовищах [2].

Записуючи шуканий розв'язок /1/ у вигляді

$$u(x, t) = f(x + ct) \equiv f(z), \quad z = x + ct, \quad /2/$$

одержуємо для рівняння

$$Df''(z) - cf'(z) + Kf(1-f) = 0, \quad /3/$$

де C - швидкість поширення плоскої хвилі. Оскільки рівняння /1/ інваріантне відносно заміни x на $-x$, то C може бути додатною або від'ємною величиною. Якщо вважати $C > 0$, то /2/ зображатиме хвилю, яка рухається у від'ємному напрямі осі x . Тому що /1/ інваріантне відносно замін вигляду $x = x' + x_0$, $t = t' + t_0$ (x_0, t_0 - сталі), то до $z = x + ct$ можна додати довільну сталу.

Вихідна задача про існування і форму розв'язку /1/ типу біжучої хвилі /2/ зводиться до знаходження таких значень C , при яких рівняння /3/ має нетривіальні розв'язки, що задовольняють умови

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} f(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} f(z) = 1, \quad /4/$$

$$0 \leq f(z) \leq 1, \quad -\infty \leq z \leq +\infty. \quad /5/$$

Беручи до уваги інваріантність шуканого розв'язку відносно зсувів і /5/, бачимо, що до /4/ можна приєднати умову

$$f(0) = \frac{1}{2}. \quad /6/$$

Існування розв'язків цієї задачі при $C > C_{\min} = 2\sqrt{\kappa D}$ доведено у [3,4]. Пропонуємо один варіант побудови точного розв'язку /3/ з допомогою рядів. Для цього зробимо в /3/ заміну незалежної змінної

$$\xi = \frac{e^z}{1+e^z},$$

яка перетворює інтервал $]-\infty, +\infty[$ у відрізок $[0,1]$. Тоді задача /3/ - /5/ перетворюється до вигляду

$$D\xi^2(1-\xi)^2 f_{\xi\xi}'' - \xi(1-\xi)[2D\xi - D + C]f_{\xi}' + \kappa f(1-f) = 0; \quad /8/$$

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1; \quad /9/$$

$$0 \leq f(\xi) \leq 1, \quad 0 \leq \xi \leq 1; \quad /10/$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \quad /11/$$

Рівняння /8/ нелінійне зі змінними коефіцієнтами, які перетворюються в нуль при $\xi = 0$ та $\xi = 1$. Шукаємо його розв'язок у вигляді узагальненого степеневого ряду

$$f(\xi) = \xi^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n, \quad /12/$$

де λ , a_n - невідомі сталі. Підставляючи /12/ у /8/ та виконуючи диференціювання під знаком суми, одержуємо

$$\begin{aligned} & D(1-\xi)^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\lambda+n)(\lambda+n-1) \xi^{\lambda+n} - \\ & - (1-\xi)(2D\xi - D + C) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\lambda+n) \xi^{\lambda+n} + \\ & + \kappa \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^{\lambda+n} - \kappa \sum_{n=0}^{\infty} C_n \xi^{2\lambda+n} = 0 \end{aligned}$$

/13/

або

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} D a_n (\lambda+n)(\lambda+n+1) \xi^{\lambda+n+2} - \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\lambda+n) [2D(\lambda+n) + D-C] \xi^{\lambda+n+1} + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} a_n [K + D(\lambda+n)^2 - C(\lambda+n)] \xi^{\lambda+n} - \sum_{n=0}^{\infty} K C_n \xi^{2\lambda+n} = 0. \end{aligned} \quad /14/$$

Тут $C_n = \sum_{m=0}^n a_m a_{n-m}$. Вимагаємо, щоб коефіцієнт при ξ^{λ} дорівнював нулю. Тоді

$$D\lambda^2 - C\lambda + K = 0. \quad /15/$$

Нехай

$$C = \frac{DN^2 + K}{N}, \quad /16/$$

де N — ціле додатне число / $N = 1, 2, 3, \dots$ /. Тоді серед коренів /15/ обов'язково буде $\lambda_1 = N$ і в цьому випадку рівність /13/ дає змогу одержати такі рекурентні формули для визначення a_n ($n \geq 1$) через a_0 :

$$\begin{aligned} & a_1 [K - C(N+1) + D(N+1)^2] - a_0 N [D(2N+1) - C] = 0; \\ & a_{n+2} [K + D(N+n+2)^2 - C(N+n+2)] - a_{n+1} (N+n+1) [2D(N+n+1) + D-C] + \\ & + D a_n (n+N)(N+n+1) = 0 \quad \text{при } n < N-2; \\ & a_{n+2} [K + D(N+n+2)^2 - C(N+n+2)] - a_{n+1} (N+n+1) [2D(N+n+1) + \\ & + D-C] + D a_n (N+n)(N+n+1) - K C_{n+2-N} = 0 \quad \text{при } n \geq N-2, \end{aligned}$$

де C визначається формулою /16/. Оскільки $\lambda = N \in N$, то ряд /12/ перетворюється в нуль при $\xi = 0$. Сталу a_0 можна визначити з другої граничної умови задачі при $\xi = 1$, або застосовуючи деякі додаткові міркування.

Аналогічна схема при побудові степеневого розв'язку рівняння /8/ в околі точки $\xi = 1$.

1. Баренблатт Г.И., Зельдович Я.Б. Об устойчивости распространения пламени // Приклад. мат. и мех. 1957. Т.21. № 6. С.856-859. 2. Зыков В.С. Моделирование волновых процессов в возбудимых средах. М., 1984. 3. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюл. Москов. ун-та. Сер. А. 1937. Мат. и мех. Т.1. С.1-25. 4. Fischer R.A. *The wave of advantageous genes* // Ann. Eugenics. 1937. Vol 7. p. 355-365.

Стаття надійшла до редколегії 31.08.87

УДК 519.6

Ю.М.Щербина, Б.М.Голуб

УМОВИ ЗБІЖНОСТІ КВАЗІНЬЮТОНІВСЬКОЇ МОДИФІКАЦІЇ МЕТОДУ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ

Нехай $f_i(x)$, $i = \overline{0, m}$ - неперервно диференційовані функції. Для розв'язування задачі нелінійного програмування

$$\min_x \{ f_0(x) : f_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m} \} \quad /1/$$

в [3,4] запропоновано квазіньютонівську модифікацію методу лінеаризації, яка полягає в наступному.

Нехай задані числа $N > 0$, $S > 1$, $\delta > 0$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $c_0 > 0$, $0 < \gamma < 1$.

Поставимо у відповідність точці x допоміжну задачу

$$\min_p \{ p^T f'_0(x) + \frac{1}{2} p^T A p : p^T f'_i(x) + f_i(x) \leq 0, i \in J_\delta(x) \}, \quad /2/$$

де A - симетрична додатно визначена матриця,

$$J_\delta(x) = \{ i : f_i(x) \geq F(x) - \delta \}, \quad F(x) = \max \{ 0, f_1(x), \dots, f_m(x) \}.$$

Розв'язок задачі /2/ і її множники Лагранжа позначимо відповідно через $\rho(x)$ і $u^i(x)$, $i \in J_\rho(x)$.

Нехай I_n - одинична матриця порядку n ,

$$\Phi_N(x) = f_0(x) + NF(x), \quad Z(x, u) = f_0(x) + \sum_{i \in J_\rho(x)} u^i f_i(x).$$

Опишемо загальний крок алгоритму. Припустимо, що точка x_k , матриця A_k і число C_k уже побудовані.

1. Розв'язуючи задачу /2/ при $x = x_k$, $A = A_k$, обчислити $\rho_k = \rho(x_k)$, $u_k^i = u^i(x_k)$, $i \in J_\rho(x_k)$.

2. Якщо $\|\rho_k\| > C_k$ або $\Phi_N(x_k + \rho_k) > \Phi_N(x_0)$, то прийняти $C_{k+1} = C_k$ і перейти до кроку 3. Інакше прийняти $x_{k+1} = x_k + \rho_k$, $C_{k+1} = \gamma \|\rho_k\|$ і перейти до кроку 4.

3. Починаючи з $\alpha = 1$, дробити α шляхом поділу навпіл до першого виконання нерівності

$$\Phi_N(x_k + \alpha \rho_k) \leq \Phi_N(x_k) - \alpha \varepsilon \rho_k^T A_k \rho_k.$$

Прийняти $x_{k+1} = x_k + \alpha \rho_k$.

4. Перерахувати матрицю $A_{k+1} = A_k + B_k$, де B_k - симетрична матриця малого рангу, яка визначає конкретний тип квазіньютонівського перерахунку [3].

5. З допомогою модифікованого LDL^T - розкладу Холеського [3] побудувати додатно визначену матрицю

$$A_{k+1} = L_{k+1} D_{k+1} L_{k+1}^T = \bar{A}_{k+1} + E_{k+1},$$

де L_{k+1} , D_{k+1} - фактори Холеського [3], а E_{k+1} - діагональна матриця, яка дорівнює нульовій, якщо матриця A_{k+1} суттєво додатно визначена.

6. Коли $\max_i d_{k+1}^i / \min_i d_{k+1}^i \leq 5$, то перейти до кроку 1 (d_{k+1}^i - i -ті діагональні елементи матриць A_{k+1} і D_{k+1}). Інакше прийняти $A_{k+1} = I_n$ і перейти до кроку 1.

Теорема 1. Нехай виконуться умови:

- 1/ множина $\Omega = \{x : \Phi_N(x) \leq \Phi_N(x_0)\}$ компактна;
- 2/ градієнти функцій $f_i(x)$, $i = 0, m$ в Ω задовольняють умову Ліпшиця;

3/ існує розв'язок задачі /2/ при довільному $x \in \Omega$, причому

$$\sum_{i \in J_\rho(x)} u^i(x) \in N.$$

Тоді в довільній граничній точці послідовності $\{x_k\}$ задовольняються необхідні умови екстремума для задачі /1/.

Нехай $f_i(x) \in C^1(\Omega)$, $i = \overline{0, m}$ і розв'язок x_* задачі /1/ є єдиною точкою з Ω , в якій виконуються необхідні умови екстремуму для задачі /1/. Припустимо, що

а/ градієнти $f'_i(x)$, $i \in J_* = \{i: f_i(x_*) = 0\}$ лінійно незалежні;

б/ $u_*^i = u^i(x_*) > 0$, $i \in J_*$;

в/ $\rho^T Z''_{xx}(x_*, u_*) \rho > 0$, де $\rho \in P = \{\rho \neq 0: \rho^T f'_i(x_*) = 0, i \in J_*\}$, причому матриця $Z''_{xx}(x_*, u_*)$ невироджена.

Теорема 2. Нехай виконані умови 1-3, а-в і

$\| [A_k - Z''_{xx}(x_*, u_*)] \rho_k \| / \| \rho_k \| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. /3/
Тоді $x_k \rightarrow x_*$ при $k \rightarrow \infty$ з надлінійною швидкістю.

Цікавим наслідком теореми 2 є те, що можливо отримати надлінійну швидкість збіжності алгоритму навіть тоді, коли збіжність матриць A_k до $Z''_{xx}(x_*, u_*)$ відсутня.

Вияснимо, в яких випадках можна гарантувати виконання умови /3/.

Нехай на кроці 4 алгоритму для перерахунку матриці $\bar{A}_{k+1}$ використовується формула Девідона-Флетчера-Пауелла [1].

Лема. Нехай виконані умови 1-3, а-в. Тоді, починаючи з деякого $\bar{K}$, $Z^T \bar{A}_k Z > 0$, $Z \in R^n$, $k \geq \bar{K}$.

Теорема 3. Нехай виконані умови 1-3, а-в і

$\varepsilon \| \rho \|^2 \leq \rho^T Z''_{xx}(x_*, u_*) \rho \leq R \| \rho \|^2$, $\rho \in P$, $R \geq \varepsilon > 0$;

$Z'_x(x, u) \neq Z'_x(\bar{x}, u)$, $x, \bar{x} \in \Omega$, $x \neq \bar{x}$;

$Z^T \bar{A}_k Z \geq \alpha \| Z \|^2$, $Z \in R^n$, $\alpha > 0$, $k \geq \bar{K}$.

Тоді при достатньо великому S $x_k \rightarrow x_*$ з надлінійною швидкістю.

У формулюванні теореми 3 збережена умова на роботу самого алгоритму: $Z^T \bar{A}_k Z \geq \alpha \| Z \|^2$, $k \geq \bar{K}$. З огляду на лему дещо слабша умова $Z^T \bar{A}_k Z > 0$ виконується завжди.

Відзначимо, що під час практичної реалізації алгоритму доцільно замість обчислення матриці A_k з наступним розкладом Холеського /порядку n^3 операцій/ безпосередньо перераховувати її фактори Холеського L_k і D_k /порядку n^2 операцій/ [2]. При цьому залишаються справедливими теореми 1-3.

1. Г и л я Ф., М о р р е й У., Р а й т М. Практическая оптимизация, М., 1985. 2. Г о л у б Б.М. Одна схема побудови квазіньютонівських алгоритмів для безумовної мінімізації функції // У цьому ж Віснику. 3. Щ е р б и н а Ю.Н., Г о л у б Б.М. Квазіньютонівські модифікації методу лінеаризації // Львів, 1986. Рукопис деп. в УкрНИИТИ, № 1396 - Ук86. 4. Щ е р б и н а Ю.Н., Г о л у б Б.М. Квазіньютонівська модифікація методу лінеаризації з використанням LDL^T -розкладу Холеського // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1988. Вип. 29. С. 5-8.

Стаття надійшла до редколегії 15.03.88

УДК 519.6

Б.М. Голуб

ОДНА СХЕМА ПОБУДОВИ КВАЗІНЬЮТОНІВСЬКИХ АЛГОРИТМІВ ДЛЯ БЕЗУМОВНОЇ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЇ

Розглянемо задачу безумовної мінімізації

$$\min f(x), \quad x \in R^n, \quad /1/$$

де $f(x)$ - неперервно диференційована функція; R^n - n -мірний евклідов простір.

Більшість відомих ітераційних методів розв'язування задачі /1/ можна зобразити у вигляді

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k, \quad /2/$$

де вектор p_k є напрямком спуску; α_k - додатний кроковий множник.

Позначимо $f'_k = f'(x_k)$, $S_k = x_{k+1} - x_k$, $y_k = f'_{k+1} - f'_k$. Нехай

$$p_k = -A_k^{-1} f'_k, \quad /3/$$

де A_k - симетрична додатно визначена матриця така, що

$$A_k S_{k-1} = y_{k-1}. \quad /4/$$

Схема /2/ - /4/ представляє клас квазіньютонівських методів з прямою апроксимацією гесіана функції $f(x)$. Для перерахунку матриць A_k , що задовольняють квазіньютонівську умову /4/, запропоновано багато формул*. Зокрема, однією з найбільш поширених є БФІШ-формула

$$A_{k+1} = A_k + y_k y_k^T / y_k^T S_k - A_k S_k S_k^T A_k / S_k^T A_k S_k, \quad /5/$$

* Г и л я Ф., М о р р е й У., Р а й т М. Практическая оптимизация. М., 1985.

де T - знак транспонування.

Для забезпечення додатної визначеності матриці A_{k+1} потрібно достатньо точно розв'язувати задачу одномірної мінімізації.

Опишемо алгоритм, який має глобальну збіжність, не використовуює процедур одномірної мінімізації при визначенні кроку α_k і зберігає властивості квазіньютонівських методів.

Нехай $A = LDL^T$, де нижня трикутна одинична матриця L і діагональна матриця D - фактори Холевського матриці A . Матрицю $\bar{A}$ отримують з A модифікацією вигляду $\bar{A} = A + \xi vv^T + E$, де v - вектор, $\xi \in \{-1, 1\}$, а матриця E дорівнює нульовій, якщо матриця $A + \xi vv^T$ суттєво додатно визначена.

Елементи факторів L і D матриці $\bar{A}$ можна обчислити з допомогою наступних алгоритмів /для зручності запису компоненти векторів і матриць в цих алгоритмах позначатимемо індексами знизу/.

Нехай $\epsilon > 0$ - мале число.

Для $\xi = 1$:

1. Прийняти $t_0 = 1$, $v^{(1)} = v$;

2. Для $i = 1, \dots, n$ знайти

$$z_i = v_i^{(i)}, \quad t_i = t_{i-1} + z_i^2 / d_i, \quad \bar{d}_i = d_i t_i / t_{i-1}, \quad \beta_i = z_i / (d_i t_i),$$

$$v_j^{(i+1)} = v_j^{(i)} - z_i \bar{\ell}_{ji}, \quad \bar{\ell}_{ji} = \ell_{ji} + \beta_i v_j^{(i+1)}, \quad j = \overline{i+1, n}.$$

Для $\xi = -1$.

1. Розв'язати рівняння $Lz = v$ і прийняти

$$t_{n+1} = \max \{ \epsilon, 1 - z^T D^{-1} z \}.$$

2. Для $i = n, \dots, 1$ обчислити

$$t_i = t_{i+1} + z_i^2 / d_i, \quad \bar{d}_i = \max \{ \epsilon, d_i t_{i+1} / t_i \}, \quad \beta_i = -z_i / (d_i t_{i+1}),$$

$$v_i^{(i)} = z_i, \quad \bar{\ell}_{ji} = \ell_{ji} + \beta_i v_j^{(i+1)}, \quad v_j^{(i)} = v_j^{(i+1)} + z_i \bar{\ell}_{ji}, \quad j = \overline{i+1, n}.$$

Використовуючи наведені алгоритми, /5/ можна замінити формулою

$$L_{k+1} D_{k+1} L_{k+1}^T = (L_k D_k L_k^T + \text{sign}(S_k^T y_k) v_k v_k^T) - w_k w_k^T + E_{k+1}, \quad (6)$$

$$\text{де } v_k = y_k / |S_k^T y_k|^{1/2}, \quad w_k = -f'_k / |p_k^T f'_k|^{1/2}$$

/тут враховано, що $S_k = \alpha_k p_k$, $A_k S_k = -\alpha_k f'_k$ /.

Сформулюємо тепер алгоритм розв'язування задачі /1/.

Нехай підібрано числа $S > 1$, $\varepsilon > 0$, $C_0 > 0$, $0 < \gamma < 1$,
 $0 < \varepsilon < 1/2$ і вектор x_0 . Прийmemo $L_0 = I$, $D_0 = I$ I -
 одинична матриця/.

Опишемо загальний крок алгоритму. Нехай точка x_k , число C_k , матриці L_k і D_k вже обчислені.

1. Розв'язати систему рівнянь $L_k D_k L_k^T p_k = -f'_k$.
2. Якщо $\|p_k\| > C_k$ або $f(x_k + p_k) > f(x_0)$, то прийняти $C_{k+1} = C_k$ і перейти до кроку 3, інакше прийняти $x_{k+1} = x_k + p_k$, $C_{k+1} = \gamma \|p_k\|$ і перейти до кроку 4.

3. Починаючи з $\alpha = 1$, дробити α шляхом поділу навпіл до першого виконання нерівності

$$f(x_k + \alpha p_k) \leq f(x_k) + \alpha \varepsilon p_k^T f'_k.$$

Прийняти $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$.

4. Перерахувати матриці L_{k+1} і D_{k+1} за формулою /6/ і обчислити діагональні елементи матриці $A_{k+1} = L_{k+1} D_{k+1} L_{k+1}^T$ за формулою

$$a_{k+1}^i = d_{k+1}^i + \sum_{j=1}^{i-1} (l_{k+1}^{ij})^2 d_{k+1}^j, \quad i = \overline{1, n}.$$

5. Якщо $\max a_{k+1}^i / \min d_{k+1}^i \leq S$, то перейти до кроку 1. Інакше прийняти $L_{k+1} = I$, $D_{k+1} = I$ і перейти до кроку 1.

Процес обчислень припинити, якщо $\|f'_k\| \leq \omega$, де ω - задана точність.

Теорема. Нехай множина $\Omega = \{x: f(x) \leq f(x_0)\}$ компактна і градієнт $f'(x)$ в Ω задовольняє умову Ліпшиця. Тоді в довільній граничній точці x_* послідовності $\{x_k\}$ виконується рівність $f'(x_*) = 0$.

Коли, крім того, $f \in C^2$, x_* - єдина точка, в якій виконується необхідна умова мінімуму, матриця $f''(x_*)$ невироджена

$$\| [A_k - f''(x_*)] p \| p \| \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow \infty$,

то послідовність $\{x_k\}$ збігається до x_* з надлінійною швидкістю.

Стаття надійшла до редколегії 15.03.88

М.В.Жук

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА ДЛЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ У ВИПАДКУ ОБЛАСТІ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИДУ

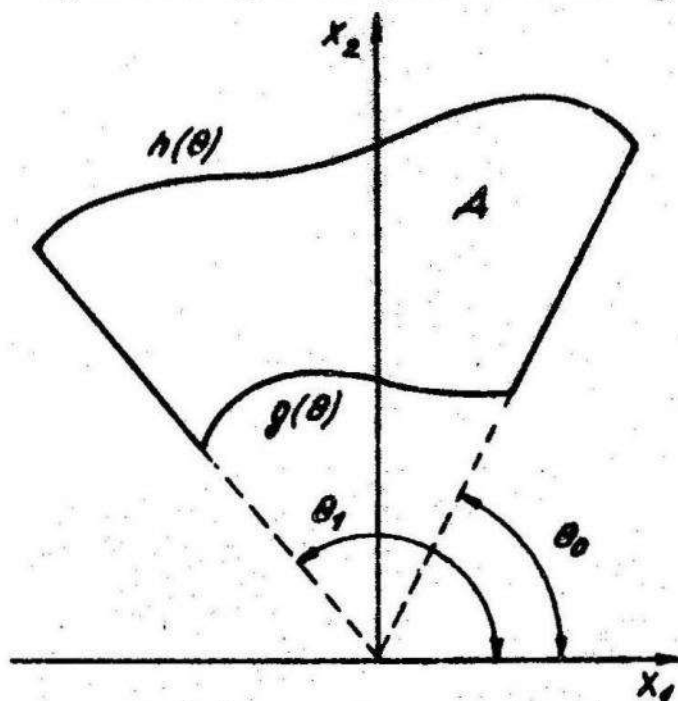
Розглянемо рівняння

$$Lu = - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho_{ij}(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + p(x_1, x_2) u = f(x_1, x_2), \quad \rho_{ij} = \rho_{ji} \quad (1)$$

при однорідній крайовій умові задачі Діріхле

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

де Γ - межа області D складається з двох прямолінійних відрізків, в яких принаймні один непаралельний осі x_2 /див. рисунок/.



Оператор L розглядаємо в просторі $H = L_2(D)$ з нормою $\|u\|^2 = \iint_D u^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2$.

За область визначення $D(L)$ оператора L приймаємо множину двічі неперервно диференційованих функцій $u(x_1, x_2)$ в області $\bar{D} = D + \Gamma$, які задовольняють умову /2/.

Вважаємо, що оператор L задовольняє умову рівномірної еліптичності:

$$\mu(\xi_1^2 + \xi_2^2) \leq \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \rho_{ij} \xi_i \xi_j \leq \eta(\xi_1^2 + \xi_2^2), \quad /3/$$

де, $\mu, \eta = \text{const} > 0$; ξ_1, ξ_2 - довільні числа;
 (x_1, x_2) - довільна точка з D .

Крім того, припускаємо, що функція $\rho(x_1, x_2)$ обмежена, тобто $\alpha \leq \rho(x_1, x_2) \leq \beta$, і при цьому виконується умова

$$\mu > 0, \text{ де } \mu = \begin{cases} \mu, & \text{якщо } \alpha \geq 0, \\ \mu + \alpha x, & \text{якщо } \alpha < 0. \end{cases} \quad /4/$$

У співвідношенні /4/ $x > 0$ - постійна нерівності Фрідріхса [3].

Введемо простір Соболева $W_2^{0,1}(D)$ функцій $u(x_1, x_2)$, які мають перші узагальнені похідні сумовані з квадратом і які задовольняють умову /2/. Норма у $W_2^{0,1}(D)$ визначається формулою

$$|u|_0^2 = \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2. \quad /5/$$

Відзначимо, що простір $W_2^{0,1}(D)$ є енергетичним простором додатно визначеного оператора $Tu = -\Delta u$, що розглядається в H при $D(T) = D(L)$, а /5/ його енергетична норма.

При цьому
$$\|u\| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} |u|_0$$

для довільного $u \in W_2^{0,1}(D)$ [3].

Для довільних $u, v \in W_2^{0,1}(D)$ формально введемо білінійну форму

$$L(u, v) = \iint_D \left[\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \rho_{ij}(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \rho(x_1, x_2) uv \right] dx_1 dx_2. \quad /6/$$

При цьому, як випливає з /3/ і /4/, для довільного $u \in W_2^{0,1}(D)$ виконується

$$\mu |u|_0^2 \leq L(u, u) \leq \eta |u|_0^2, \quad /7/$$

де

$$\eta = \begin{cases} \eta + \beta x, & \text{якщо } \beta \geq 0, \\ \eta, & \text{якщо } \beta \leq 0. \end{cases}$$

Узагальненим розв'язком задачі /1/ - /2/ називається функція $u \in W_2^{0,1}$, для якої виконується тотожність

$$L(u, v) = \iint_D f \cdot v \, dx_1 \, dx_2 \quad /8/$$

при довільній функції $v \in \dot{W}_2^1(D)$.

Перейдемо до полярної системи координат $x_1 = \rho \cos \theta$, $x_2 = \rho \sin \theta$, в якій межа області D описується прямими $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_1$ і достатньо гладкими кривими $\rho = g(\theta)$, $\rho = h(\theta)$, при цьому $g(\theta) < h(\theta)$ для $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$, тобто область D перетворюється в область

$$D_1 : \left\{ \begin{array}{l} \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 \\ g(\theta) \leq \rho \leq h(\theta) \end{array} \right\}$$

Оскільки перетворення змінних (x_1, x_2) на (ρ, θ) таке, що область D біоднозначно перетворюється в область D_1 , причому перетворення в обидві сторони здійснюється функціями, неперервно диференційованими у відповідних замкнутих областях зміни (x_1, x_2) і (ρ, θ) , то властивості функцій і операторів в полярних координатах зберігаються. Зауважимо, що при цьому простір $\dot{W}_2^1(D)$ переходить в простір $\dot{W}_2^1(D_1)$ з нормою

$$\|u\|_0^2 = \iint_{D_1} \left[\rho \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right] d\rho d\theta,$$

а задача /1/ записується у вигляді

$$Lu = -\frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i'} \left(\rho_{ij}' \frac{\partial u}{\partial x_j'} \right) + \rho u = f,$$

$$\rho_{ij}' = \rho \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \rho_{kl} \frac{\partial x_k'}{\partial x_i} \frac{\partial x_l'}{\partial x_j}, \quad \rho = x_1', \quad \theta = x_2'.$$

Наближений розв'язок задачі /1/ - /2/, згідно з методом Канторовича, шукаємо у вигляді

$$u_n(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^n C_k(\theta) \varphi_k(\rho, \theta),$$

де лінійно незалежні у проміжку $[g(\theta), h(\theta)]$ функції $\varphi_k(\rho, \theta)$ задовольняють умови

/9/

$$\varphi_k(\rho, \theta) \Big|_{\rho=g(\theta)} = \varphi_k(\rho, \theta) \Big|_{\rho=h(\theta)} = 0, \quad k=1, 2, \dots \quad /10/$$

Їх вибираємо такими, щоб система функцій

$\{X_\ell(\theta)\varphi_k(\rho, \theta)\} \in \dot{W}_2'(\Pi_1)$ була повною системою лінійно незалежних функцій в просторі $\dot{W}_2'(\Pi_1)$, при цьому функції системи $\{X_\ell(\theta)\}$ задовольняють умови

$$X_\ell(\theta) \Big|_{\theta=\theta_0} = X_\ell(\theta) \Big|_{\theta=\theta_1} = 0, \quad \ell=1, 2, \dots \quad /11/$$

Невідомі коефіцієнти $C_k(\theta)$ визначаємо в системі

$$\int_{g(\theta)}^{h(\theta)} \rho (L u_n - f) \varphi_i(\rho, \theta) d\rho = 0, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad /12/$$

$$C_k(\theta) \Big|_{\theta=\theta_0} = C_k(\theta) \Big|_{\theta=\theta_1} = 0, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad /13/$$

Позначимо через $H_n \subset H$ простір функцій вигляду

$$u_n(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^n a_k(\theta) \varphi_k(\rho, \theta). \quad \text{Нехай для деякої функції}$$

$u_n(\rho, \theta) \in H_n \cap \dot{W}_2'(\Pi_1)$ справедлива тотожність

$$L(u_n, v_n) = \iint_D \rho f(\rho, \theta) v_n(\rho, \theta) d\rho d\theta,$$

в якій $v_n(\rho, \theta)$ довільна функція з $H_n \cap \dot{W}_2'(\Pi_1)$.

Тоді функція $u_n(\rho, \theta)$ називається узагальненим розв'язком системи методу Канторовича /11/ - /12/.

Аналогічно, як і в праці [2], можна довести наступну теорему.

Теорема. Якщо виконуються умови /7/, то для довільної функції $f \in H$ задача /1/ - /2/ має єдиний узагальнений розв'язок $u \in \dot{W}_2'$; при довільному n для системи методу Канторовича /12/ - /13/ існує єдиний узагальнений розв'язок $u_n(\rho, \theta) \in H_n \cap \dot{W}_2'(\Pi_1)$, метод Канторовича збігається і швидкість збіжності характеризується оцінкою

$$\|u - u_n\|_0 \leq C \|u - v_n\|_0, \quad /14/$$

де $C = \sqrt{\frac{2}{\mu}}$; елемент $v_n = \sum_{k=1}^n a_k(\theta) \varphi_k(\rho, \theta) \in H_n \cap \dot{W}_2'(\Pi_1)$

вибираємо таким, щоб реалізувався мінімум функціоналу $\|u - v_n\|_0$.

Якщо координатну систему функцій $\{\varphi_k(\rho, \theta)\}$ узяти в одному з виглядів

$$\bar{\psi}_k(\rho, \theta) = \sin \frac{k\pi(\rho - g(\theta))}{h(\theta) - g(\theta)}, \quad \tilde{\psi}_k(\rho, \theta) = \rho^{k-1}(\rho - g(\theta))(\rho - h(\theta)),$$

/15/

то за умови неперервності перших похідних узагальненого розв'язку вихідної задачі та існування других похідних $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta}$, сумованих з квадратом, справедлива оцінка

$$\|u - u_n\|_0 = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

/16/

Накладаючи умови на похідні більш високого порядку, можна отримати більш високий порядок малості [1].

1. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М., 1962. 2. Луцка А.Б., Юк М.В. Исследование быстроты сходимости метода Канторовича для линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа // Методы количественного и качественного исследования дифференциальных и интегральных уравнений. К., 1975. С. 84-98. 3. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., 1970.

Стаття надійшла до редколегії 15.03.88

УДК 518:517.948

Л.Л.Роман

ПРО ЕФЕКТИВНІСТЬ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ТИПУ НЬЮТОНА-КАНТОРОВИЧА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Дослідимо ефективність застосування методів Ньютона-Канторовича [5] зі швидкістю збіжності $1 + \sqrt{2}$ [1], їх рекурсивних процесів [3,4], також $(N+1)$ - точкового послідовного методу січних [6], методу [2,7] для розв'язування крайової задачі системи нелінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

/1/

$$g(x_0, x_\ell) = d,$$

/2/

де $x(t)$, $f(t, x)$, $g(x_0, x_\ell)$ - вектор-функції розмірності N від вказаних аргументів; d - заданий вектор; $x_0 = x(0)$, $x_\ell = x(\ell)$

Уважатимемо ефективнішим той алгоритм, при використанні якого одержуємо розв'язок задачі з бажаною точністю, виконавши при цьому найменше число операцій. В [1] запропоновано визначати ефективність одного методу відносно іншого з допомогою формули

$$Q_1/Q_2 < \log_{\tau_2} \tau_1, \quad /3/$$

де Q_1, Q_2 - кількість обчислень, необхідних для проведення однієї ітерації; τ_1, τ_2 - порядок збіжності відповідно першого та другого методів.

Використовуючи методи пристрілки, розв'язування задачі /1/, /2/ зведемо до послідовного розв'язування двох задач: системи нелінійних рівнянь виду

$$Q(x(0, x_\tau), x(l, x_\tau)) = d \quad /4/$$

і задачі Коші для системи /1/ при початковій умові

$$x(\tau) = x_\tau, \quad /5/$$

де $0 \leq \tau \leq l$; x_τ - розв'язок /4/.

Застосування досліджуваних методів для розв'язування системи /4/ вимагає на кожному кроці розв'язувати певну кількість задач Коші, причому інші обчислювальні затрати порівняно з обсягом обчислень, необхідним для розв'язування задач Коші, незначні. У зв'язку з цим доцільно мати критерій ефективності методів, більше пристосований до специфіки крайових задач.

Розглянемо два методи з порядком збіжності τ_1, τ_2 . Нехай перший метод вимагає для проведення однієї ітерації виконання $Q_1 = K_1 M_f$ обчислень, а другий $Q_2 = K_2 M_f$, де K_1, K_2 - кількість задач Коші відповідно для першого і другого методів;

M_f - кількість обчислювальних операцій, необхідних для розв'язування однієї задачі Коші. Метод з порядком збіжності τ_1 ефективніший від методу τ_2 , коли згідно з /3/

$$K_1 M_f / K_2 M_f < \log_{\tau_2} \tau_1, \quad \text{звідки} \quad K_1 / K_2 < \log_{\tau_2} \tau_1.$$

Останню нерівність перепишемо у вигляді

$$\tau_1 > \tau_2^{K_1/K_2} \quad \text{або} \quad \sqrt[K_1]{\tau_1} > \sqrt[K_2]{\tau_2}$$

Позначимо $J_1 = \sqrt[K_1]{\tau_1}$, $J_2 = \sqrt[K_2]{\tau_2}$. Ми побачили, що метод з порядком збіжності τ_1 ефективніший від методу з порядком збіжності τ_2 , коли $J_1 > J_2$. Таким чином, індекс ефективності ме-

тоду при розв'язуванні крайових задач визначаємо за формулою

$$J = \sqrt[K]{\tau},$$

/6/

де τ - порядок збіжності досліджуваного методу; K - кількість задач Коші, необхідних для проведення однієї ітерації.

Застосування різницевого аналогу методів Ньютона-Канторовича зі швидкістю збіжності $1 + \sqrt{2}$ вимагає розв'язувати на кожному кроці $N + 1$ задачу Коші, де N - розмірність системи /4/. Індекси ефективності відповідно $J_N = \sqrt{2}$, $J_{1+\sqrt{2}} = \sqrt[4]{1+\sqrt{2}}$. Використовуючи рекурсивні процеси методів Ньютона-Канторовича [4] зі швидкістю збіжності $1 + \sqrt{2}$ [3], на кожному кроці розв'язуємо $N + \rho$ задач Коші, де ρ - оптимальна глибина рекурсії. Індекси ефективності $J_{\rho N} = \sqrt[\rho]{\rho+1}$, $J_{\rho+1+\sqrt{2}} = \sqrt[\rho]{\rho}$, де ρ - найближче ціле число до розв'язку рівняння

$$\ln(\rho+1) = 1 + (N-1)/(\rho+1),$$

/7/

ρ_2 - визначається аналогічно із рівняння

$$\ln((\rho+1 + \sqrt{\rho^2 + 2\rho + 5})/2) = (N+\rho)/\sqrt{\rho^2 + 2\rho + 5},$$

$$\rho = (\rho_2 + 1 + \sqrt{\rho_2^2 + 2\rho_2 + 5})/2.$$

/8/

Для побудови розв'язку системи /4/ / $N + 1$ / - точковим послідовним методом січних [6] необхідно розв'язувати на кожному кроці, крім першого, одну задачу Коші, методом із праць [2,7] - дві задачі Коші. Індекси ефективності $J_{[6]} = \tau$, $J_{[2,7]} = \sqrt{\rho}$, де τ, ρ - порядки збіжності методів із праць [6], [2,7].

Залежність індексів ефективності досліджуваних методів від розмірності N -системи /4/ дає змогу апіорі визначити ефективний алгоритм розв'язку задачі /1/, /2/, побудувати пріоритетну /в сенсі кількості обчислень/ схему використання даних методів. Пріоритетна схема використання досліджуваних методів при розв'язуванні крайових задач така: / $N + 1$ / - точковий послідовний метод січних [6] і метод із праць [2,7], рекурсивні ітераційні процеси [3,4], метод зі швидкістю збіжності $1 + \sqrt{2}$ [1], метод Ньютона-Канторовича [5].

Необхідно зазначити, що дослідження ефективності методів [2,6,7] проводили в припущенні, що початкова матриця A_0 буде дуже близькою до різницевого аналогу матриці Якобі. Будучи A_0 довільним чином, наведені алгоритми демо програми в ефективності.

Для перевірки одержаних результатів методи типу Ньютона-Канторовича застосовували для розв'язування ряду задач механіки, задач оптимального керування на швидкодію. У всіх алгоритмах початкове наближення, різницеві матриці на першій ітерації, точність обчислень вибирали одні і ті ж. Крім того, в методах праць [2,6,7] початкова матриця A_0 була близькою до різницевої матриці Якобі. При практичній реалізації методів на ЕОМ висновки про ефективність методів робились як за загальною кількістю розв'язаних задач Коші, необхідних для одержання розв'язку з заданою точністю, так і часом реалізації їх на ЕОМ.

Одержані результати підтвердили апріорні теоретичні дослідження. Зокрема, якщо прийняти час розв'язку задачі методом Ньютона-Канторовича за 100 %, то методом зі швидкістю збіжності $1 + \sqrt{2}$ необхідно 80 %, методом із праць [7] - 70 %, рекурсивним методом [3,4] і методом із праці [6] - 67 % часу.

1. Б а р т і ш М.Я. Про один ітераційний метод розв'язування функціональних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер.А. 1968. № 5. С.387-391. 2. Б а р т і ш М.Я. Про один метод розв'язування систем нелінійних алгебраїчних рівнянь з надлінійною швидкістю збіжності // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1985. Вип.23. С.3-6. 3. Б а р т і ш М.Я., Р о м а н Л.Л. Про один рекурсивний метод розв'язування нелінійних функціональних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1987. Вип.26. С.3-7. 4. Б а р т і ш М.Я., Щ е р б и н а Ю.Н. Итерационные формулы, получаемые с помощью рекурсии // Мат. сб. К., 1976. С.50-53. 5. К а н т о р о в и ч Л.В. О методе Ньютона // Тр.мат. ин-та им. Стеклова. 1949. № 28. С.104-144. 6. О р т е г а Дж., Р е й н б о л д т В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М., 1975. 7. Р о м а н Л.Л. О модификации итерационного процесса со скоростью сходимости $1 + \sqrt{2}$ // Тез. докл. III симпозиума "Методы решения нелинейных уравнений и задач оптимизации". Таллин. 1984. С.90-91.

Стаття надійшла до редколегії 22.03.88

І. Т а н т и л ь в и п а д к о в о ї з м і н н о ї. Нехай абсолютно неперервна додатна випадкова змінна ξ з функцією розподілу ймовірностей $F(t)$ і густиною $p(t) = F'(t)$ має обмежене сподівання

$$E\xi = \int_0^{\infty} t p(t) dt = \int_0^{\infty} [1 - F(t)] dt.$$

Т а н т и л е м порядку ω додатної випадкової змінної ξ з густиною $p(t)$ називається розв'язок τ_ω рівняння

$$\int_0^{\tau_\omega} t p(t) dt = \omega \int_{\tau_\omega}^{\infty} t p(t) dt, \quad \omega > 0.$$

/1/

Оскільки, інтегруючи частинами,

$$\int_0^{\tau_\omega} t p(t) dt = \int_0^{\tau_\omega} [F(\tau_\omega) - F(t)] dt,$$

/2/

і права частина тотожності /2/ є площею, обмеженою віссю ординат, прямою на висоті $F(\tau_\omega)$ і графіком функції розподілу $F(t)$ на відрізку $[0, \tau_\omega]$, то числове значення лівої частини рівняння /1/ дорівнює тій же площі. Аналогічно, інтегруючи частинами

$$\int_{\tau_\omega}^{\infty} t p(t) dt = \tau_\omega [1 - F(\tau_\omega)] + \int_{\tau_\omega}^{\infty} [1 - F(t)] dt,$$

/3/

дістаємо, що ліва частина тотожності /3/ чисельно дорівнює площі, обмеженій віссю ординат, прямими на висоті 1 і $F(\tau_\omega)$ та графіком функції розподілу $F(t)$ на промені $[\tau_\omega, \infty]$. Записуючи рівність /1/ у вигляді

$$\frac{\int_0^{\tau_\omega} t p(t) dt}{\int_{\tau_\omega}^{\infty} t p(t) dt} = \omega : 1, \quad \omega > 0,$$

/4/

приходимо до висновку, що пряма на висоті $F(\tau_\omega)$ ділить площу, обмежену віссю ординат, прямою на висоті 1 та графіком функції розподілу $F(t)$ на дві частини, нижню та верхню, в пропорції $\omega:1$. Наприклад, при $\omega = \frac{1}{9}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4, 9$ пряма на висоті $F(\tau_\omega)$ ділить площу математичного сподівання на нижню та верхню частини відповідно в пропорції 1:9, 1:4, 1:3, 1:2, 1:1, 2:1, 3:1, 4:1, 9:1. Зокрема, перший децильний тантіль $\tau_{\frac{1}{9}}$ ділить сподівання в пропорції 1:9; перший кuartильний тантіль $\tau_{\frac{1}{4}}$ ділить сподівання в пропорції 1:3; медіанний тантіль $\tau_{\frac{1}{2}}$ ділить сподівання на дві рівні частини; третій кuartильний тантіль $\tau_{\frac{3}{4}}$ ділить сподівання в пропорції 3:1; дев'ятий децильний тантіль $\tau_{\frac{9}{10}}$ ділить сподівання в пропорції 9:1.

Приклад. Тантіль випадкової змінної Вейбула. Нехай

$$r(t) = \frac{\gamma}{\theta^\gamma} t^{\gamma-1} e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\gamma}, \quad t > 0, (\theta > 0, \gamma > 0).$$

Тоді рівняння /1/ набуває вигляду

$$\gamma\left(\frac{1}{\gamma}+1, \left(\frac{\tau_\omega}{\theta}\right)^\gamma\right) = \omega \Gamma\left(\frac{1}{\gamma}+1, \left(\frac{\tau_\omega}{\theta}\right)^\gamma\right), \quad \omega > 0,$$

/5/

де неповні гама-функції

$$\gamma(a, t) = \int_0^t e^{-x} x^{a-1} dx; \quad \Gamma(a, t) = \int_t^\infty e^{-x} x^{a-1} dx; \quad a > 0.$$

Зокрема, при $\gamma = 1$ рівняння /5/ переходить у рівняння для тантилів експонентної змінної

$$e^{\frac{\tau_\omega}{\theta}} = (\omega+1)\left(\frac{\tau_\omega}{\theta}+1\right), \quad \omega > 0.$$

/6/

Звідси, наприклад, для $\theta = 10000$ маємо:

$\tau_{\frac{1}{9}} = 5315$	$\tau_{\frac{1}{4}} = 8245$	$\tau_{\frac{1}{3}} = 9610$
$\tau_{\frac{1}{2}} = 11900$	$\tau_{\frac{2}{3}} = 16780$	$\tau_{\frac{3}{4}} = 22900$
$\tau_{\frac{4}{9}} = 26925$	$\tau_{\frac{5}{6}} = 29940$	$\tau_{\frac{9}{10}} = 38900$

2. Тантіль варіаційного ряду. Нехай

$$x_1, \dots, x_j, \dots, x_n$$

/7/

варіаційний ряд незалежних спостережень над абсолютно неперервною

додатною випадковою змінною ξ . Тантилем τ_ω порядку ω варіаційного ряду /7/ називається елемент x_j , який задовольняє систему нерівностей*

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \dots + x_{j-1} &< \omega(x_j + \dots + x_n) \\ x_1 + \dots + x_j &> \omega(x_{j+1} + \dots + x_n) \end{aligned} \right\}, \omega > 0. \quad /8/$$

При $\omega = \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3$ і 9 маємо відповідно перший децильний тантиль, перший квартильний тантиль, медіанний тантиль, третій квартильний тантиль і дев'ятий децильний тантиль. Наприклад, коли варіаційний ряд /7/ представляє собою напрацювання до відмови n однотипних технічних одиниць, то сумарне напрацювання одиниць, які відмовили до моменту τ_1 , де τ_1 - медіанний тантиль, наближено дорівнює сумарному напрацюванню технічних одиниць, що відмовили після моменту τ_1 .

Приклад. Знайти медіанний тантиль варіаційного ряду 21 37
51 64 77 90 103 118 134 152 176 205 256

Оскільки

$$\left. \begin{aligned} 21 + \dots + 134 &= 695 < 152 + \dots + 256 = 789 \\ 21 + \dots + 152 &= 847 > 176 + \dots + 256 = 637 \end{aligned} \right\},$$

то медіанний тантиль даного варіаційного ряду $\tau_1 = 152$.

Зрозуміло, що при розв'язуванні рівняння /1/ або системи нерівностей /8/, як правило, використовується ЕОМ.

Стаття надійшла до редколегії 17.12.87

* Джини К. Средние величины. М., 1970.

О.П.Гнатишин, Э.В.Москв"як
ОПТИМІЗАЦІЯ СТРУКТУРИ РЕМОНТУ
З УРАХУВАННЯМ РІВНЯ НАПРУЖЕННЯ

Нехай напрацювання деякої технічної системи до відмови τ має функцію розподілу Вейбула з урахуванням напруження [2]

$$P(\tau \leq t) = F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{x^a t}{\theta}\right)^\nu}, t > 0, (a > 0, x > 0, \theta > 0, \nu > 1). \quad /1/$$

Тоді інтенсивність відмов системи

$$h(t) = \nu \left(\frac{x^a}{\theta}\right)^\nu t^{\nu-1}, t > 0, (a > 0, x > 0, \theta > 0, \nu > 1). \quad /2/$$

Планові заміни чи ремонти системи проводять з моменти часу $T, 2T, 3T, \dots$. Щоб оптимізувати структуру ремонту, необхідно визначити T , яке мінімізувало б функцію витрат:

$$C(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_1 E N_1(t) + C_2 E N_2(t)}{t}, \quad /3/$$

де C_1 - вартість мінімального ремонту; C_2 - вартість попереджувальної заміни; $N_1(t)$ - кількість відмов на інтервалі $[0, t]$; $N_2(t)$ - кількість попереджувальних замін на інтервалі $[0, t]$; E - оператор математичного сподівання.

В [1] показано, що T , яке мінімізує функцію /3/, з розв'язком рівняння

$$\int_0^T [h(T) - h(t)] dt = \frac{C_2}{C_1}. \quad /4/$$

За умови, що $h(t)$ - строго зростаюча і диференційована функція, якщо розв'язок рівняння /4/ існує, то він єдиний.

У випадку розподілу /1/ оптимальне значення

$$T_0 = \frac{\theta}{x^a} \left(\frac{1}{\nu-1} \frac{C_2}{C_1} \right)^{\frac{1}{\nu}}. \quad /5/$$

Проілюструємо залежність оптимального періоду планових замін від рівня напруження x і відношення вартостей $\frac{C_2}{C_1}$ на числовому прикладі.

Нехай $\sigma = 1,72 \cdot 10^{20}$; $a = 12$; $x = 20$ /2/ 32;
 $\nu = 1,5$ /0,5/ 4; $\frac{C_2}{C_1} = 10$; 2; 1; 0,5; 0,25; 0,125; 0,1;
 1/16; 1/32; 1/64. Тоді при фіксованому значенні параметра форми ν оптимальний період планових заміни чи ремонтів зменшується зі зростанням рівня напруження x та зниженням відношення вартостей $\frac{C_2}{C_1}$. Однак при фіксованих напруженнях x і відношеннях вартостей $\frac{C_2}{C_1}$ зі збільшенням параметра форми ν оптимальний період планових заміни чи ремонтів може:

1/ лише зменшуватися; наприклад, при $x = 20$ і $\frac{C_2}{C_1} = 10$ маємо

ν :	1,5	2	2,5	3	3,5	4
T_0 :	309401	132791	89688	71806	62400	56740

2/ спочатку зменшуватися, а потім збільшуватися; наприклад, при $x = 26$ і $\frac{C_2}{C_1} = 0,25$

ν :	1,5	2	2,5	3	3,5	4
T_0 :	1135	901	880	901	934	968

3/ тільки збільшуватись; наприклад, при $x = 32$ і $\frac{C_2}{C_1} = 1/64$

ν :	1,5	2	2,5	3	3,5	4
T_0 :	15	19	24	30	35	40

Використовуючи формулу $\frac{1}{\nu} \frac{1}{a}$

$$x = \left[\frac{\sigma}{T_0} \left(\frac{1}{\nu-1} \frac{C_2}{C_1} \right)^{\frac{1}{\nu}} \right]^{\frac{1}{a}},$$

/6/

аналогічним чином можна проілюструвати, як доцільно змінювати рівень напруження x для того, щоб при заданих значеннях параметра форми та відношення вартостей зберегти оптимальний період T_0 планових заміни сталим.

1. Е а р л о у Р., П р о ш а н Ф. Математическая теория надежности. М., 1969. 2. К в і т І.Д., М о с к в " я к С.В. Залежний від рівня напруження розподіл відмови технічної одиниці // У цьому ж Віснику.

Стаття надійшла до редакції 13.07.87

І.Д.Квіт, Є.В.Москв'як

ЗАЛЕЖНИЙ ВІД РІВНЯ НАПРУЖЕННЯ РОЗПОДІЛ
ВІДМОВИ ТЕХНІЧНОЇ ОДИНИЦІ

Нехай K груп однотипних технічних одиниць працюють відповідно при напруженнях $x_1, \dots, x_i, \dots, x_K$, / $K = 2, 3, \dots$ /. У кожній групі одиниці можуть працювати до відмови F або зупинки S . Потрібно перевірити гіпотезу про те, що функція розподілу напрацювань до відмови при рівні напруження x має вигляд

$$F(x^a t), \quad t > 0, (x > 0, a > 0), \quad /1/$$

де t - час; a - невідомий параметр. У випадку розподілу Вейбула маємо

$$F(x^a t) = 1 - e^{-\left(\frac{x^a t}{\phi}\right)^\gamma}, \quad t > 0, (x > 0, a > 0, \phi > 0, \gamma > 0), \quad /2/$$

де γ - параметр форми; ϕx^{-a} - параметр масштабу.

Варіаційний ряд зрізаної вибірки напрацювань при напруженні x_i запишемо у вигляді

$$t_i(\bar{1}, n_i) \leq \dots \leq t_i(\bar{j}, n_i) \leq \dots \leq t_i(\bar{n}_i, n_i), (i = 1, \dots, K; K = 2, 3, \dots), /3/$$

де j - те за величиною $t_i(\bar{j}, n_i)$ позначає напрацювання до відмови F або зупинки S , n_i - кількість технічних одиниць в i -й групі. Якщо $t_i(\bar{j}, n_i)$ позначає напрацювання до відмови F , то $\bar{j}$ виражає середній ранг цієї відмови. Метод знаходження сподіваних рангів відмов у зрізаному емпіричному варіаційному ряді описано в праці [1]. Використовуючи дані /3/, оцінюємо параметр a гіпотетичного розподілу /1/, а також інші параметри, якщо такі є. Функція /1/ тепер повністю визначена. На її основі, за методикою, описаною в праці [2], знаходимо гіпотетичні варіаційні ряди, відповідні емпіричним варіаційним рядам /3/. Якщо при заданому рівні значущості α число $\mathcal{H}(+)$ додатних різниць між емпіричними та відповідними гіпотетичними напрацюваннями до відмов знаходиться для кожної групи в області прийому гіпотези, то гіпотезу /1/ приймаємо. Коли ж хоча б для однієї групи число

$\mathcal{D}(+)$ знаходиться зовні області прийому гіпотези, то гіпотезу /1/ відхиляємо. Зазначимо, що область прийому гіпотези, як правило, для кожної групи своя.

Для ілюстрації описаної методики розглянемо дані з праці [3] про часи руйнування зразків з нержавіючої сталі /табл. 1/.

Таблиця 1

Напруження x_i	Час руйнування $t_i(j, 6)$					
28,84	1267	1637	1658	1709	1785	2437
31,63	170	257	265	570	594	779
34,68	76	87	96	115	122	132
38,02	22	37	39	41	42	43
41,69	6,6	9,6	11,2	12,3	19,7	20,4
45,71	1,9	3,9	4,3	4,6	5,7	9,0

Тут $K = 6$ груп по $n_i = 6$ технічних одиниць; шість повних вибірок з однаковими обсягами. Слід перевірити гіпотезу про те, що дані з табл. 1 описуються функцією розподілу /2/.

Спершу оцінимо параметр a . Оскільки при $\frac{x^a t}{6} = 1$ вираз /2/ завжди дорівнює 0,63212 і значення кожної з шістьох медіанних емпіричних функцій розподілу в точках $t_i(j, 6)$ при $j = 1, \dots, 6$ відповідно дорівнюють:

0,10910; 0,26445; 0,42141; 0,57859; 0,73555; 0,89090, то за допомогою лінійної інтерполяції дістаємо

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
1735,9	578,2	117,4	41,3	14,82	4,98

Зі співвідношення

$$\frac{x_i^a t_i}{6} = \frac{x_{i+1}^a t_{i+1}}{6}, \quad (i=1, \dots, 5)$$

випливає, що

$$a = \left(\ln \frac{t_i}{t_{i+1}} \right) / \left(\ln \frac{x_{i+1}}{x_i} \right), \quad (i=1, \dots, 5).$$

Звідси знаходимо п'ять значень для a :

11,89962 17,32004 11,35021 11,13029 11,85876.

За оцінку параметра a приймемо середнє арифметичне їх значень
 $a = 12,71$.

Зі співвідношення

$$\frac{x_i^{12,71} t_i}{6} = 1, \quad (i = 1, \dots, 6)$$

випливає, що

$$6 = x_i^{12,71} t_i, \quad (i = 1, \dots, 6).$$

Звідси дістаємо шість значень для 6 :

$$\begin{array}{lll} 6,248938 \cdot 10^{21} & 6,734755 \cdot 10^{21} & 4,405696 \cdot 10^{21} \\ 4,992642 \cdot 10^{21} & 5,774952 \cdot 10^{21} & 6,245922 \cdot 10^{21} \end{array}$$

За оцінку параметра 6 приймаємо середнє арифметичне їх значень
 $6 = 5,733817 \cdot 10^{21}$.

Таким чином, гіпотетичний розподіл /2/ набуває вигляду

$$F(x^{12,71} t) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{x^{12,71} t}{5,733817 \cdot 10^{21}} \right)^{\gamma} \right\}, \quad t > 0, \quad (\gamma > 0). \quad /4/$$

Виникає запитання: яке значення надати параметрові форми γ ?

Припустимо, що $\gamma = 1$. Тоді за формулою

$$1 - \exp \left\{ - \frac{x_i^{12,71} t_i (j, 6; 0,5)}{5,733817 \cdot 10^{21}} \right\} = \frac{j-0,3}{6,4}, \quad (j=1, \dots, 6; i=1, \dots, 6)$$

знаходимо гіпотетичні варіаційні ряди /табл. 2/.

Число додатних різниць відповідних елементів емпіричних і гіпотетичних варіаційних рядів відповідно дорівнює 4, 3, 3, 4, 4, 4. При рівні значущості $\alpha = 0,05$ і обсязі вибірки шість, область прийому гіпотези $[1,5]$. Оскільки для всіх шістьох вибірок знайдені емпіричні значення статистики $\mathcal{X} (+)$ знаходяться в області прийому гіпотези, то функція розподілу

$$F(x^{12,71} t) = 1 - \exp \left\{ - \frac{x^{12,71} t}{5,733817 \cdot 10^{21}} \right\}, \quad t > 0 \quad /5/$$

Таблиця 2

Напруження x_i	Час руйнування $t_i(j, 6; 0,5)$					
28,84	184	491	872	1374	2110	3523
31,63	57	152	270	425	653	1089
34,68	18	47	84	132	203	338
38,02	5	15	26	40,98	63	105
41,69	1,7	4,5	8,1	12,7	19,5	32,6
45,71	0,5	1,4	2,5	3,9	6,1	10,1

підходить для опису експериментальних даних табл. 1. Функцію /5/ можна використати для прогнозування часів руйнування розгляданих технічних одиниць у випадку інших рівнів напружень. Наприклад, при $x = 30$ і $n = 10$ знаходимо $t(j, 10; 0,5)$: 67, 172, 290, 424, 580, 766, 997, 1300, 1747, 2602.

Легко перевірити, що при гіпотезі $\gamma = 4$ значення $\chi(+)$ відповідно дорівнюють 6, 3, 0, 1, 2, 5 і два з них критичні, а при $\gamma = 2$ маємо 5, 4, 2, 3, 4, 6 – одне критичне.

1. К в і т І.Д. Методичні вказівки до курсу "Теорія надійності", Львів, 1982. 2. К в і т І.Д. Емпіричний і гіпотетичний зрізані варіаційні ряди // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1987. Вип. 27. С. 47-50. 3. Schroyer R.L. An Exact Distribution-Free Analysis for Accelerated Life Testing at Several Levels of Single Stress // Technometrics. 1986. Vol. 28 p. 165-175.

Стаття надійшла до редколегії 27.04.87

Д.В.Гриліцький

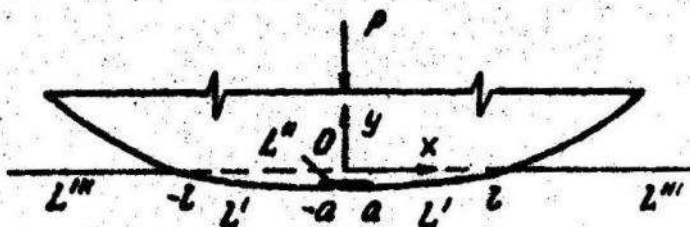
ПРО КОНТАКТНУ ТЕРМОПРУЖНОПЛАСТИЧНУ ЗАДАЧУ
ДЛЯ ПІВПЛОЩИНИ

Л.О.Галін і Г.П.Черепанов вперше поставили і розв'язали контактну пружнопластичну задачу для півплощини, матеріал якої ідеально пружнопластичний і відповідає умові пластичності Треска-Сен-Венана [1].

Ми побудували [2,3] розв'язок цієї задачі для випадку нагрітого штампа, який має прямолінійну горизонтальну основу. При цьому вважалось, що тепловий контакт між співдотичними тілами ідеальний, а границя півплощини зовні ділянки контакту підтримується при нульовій температурі.

У цій статті продовжимо розглядати задачу про тиск нагрітого штампа на півплощину при тих же теплофізичних крайових умовах, що і в працях [2,3]. При цьому припускаємо, що основа штампа обмежена дугою параболі. Цей випадок має самостійне значення. Побудуємо для нього наближений розв'язок.

Припускаючи, що задача має геометричну, силову та теплову симетрію, маємо одну смугу пластичності на границі півплощини під штампом, яка розміститься в центральній частині ділянки контакту симетрично відносно неї /див. рисунок/.



Введемо позначення: L - вся границя півплощини; L' - сукупність відрізків границі півплощини, на яких відома вертикальна компонента вектора пружного переміщення; L'' - смуга пластичності; L''' - границя півплощини зовні ділянки контакту. Очевидно, що $L = L' + L'' + L'''$.

Позначаючи через σ_s границю текучості для ідеального пружнопластичного матеріалу півплощини на стиснення, граничні умови задачі запишемо як

$$\sigma_y(x) = \tau_{xy}(x) = 0; \quad T(x) = 0; \quad x \in L'';$$

$$\sigma_y(x) = -\sigma_s, \quad x \in L'';$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = f'(x) = \frac{x}{R}, \quad x \in L'; \quad /1/$$

$$\tau_{xy}(x) = 0, \quad x \in (L' + L'');$$

$$T = T(x), \quad x \in (L' + L''),$$

де $f(x) = \frac{x^2}{2R}$ - рівняння основи штамп; $T(x)$ - температура.

При заданих граничних умовах необхідно визначити: величину ділянки контакту 2ℓ , величину пластичної смуги $2a$, величину і характер розподілу тиску $\sigma_y(x)$ на $L'(-\ell, -a; a, \ell)$.

У праці [3] отримана формула, що встановлює залежність між напруженнями, вертикальним переміщенням і температурою на границі півплощини:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{y=0} = -\frac{\alpha-1}{4\mu} \tau_{xy}(x) + \frac{\alpha+1}{4\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_y(t) dt}{t-x} + \frac{\gamma}{2\pi(\lambda+\mu)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(t) dt}{t-x}, \quad /2/$$

$$\gamma = \frac{\alpha_T E}{1-2\nu} = \alpha_T (3\lambda+2\mu) \quad - \text{ для плоскої деформації;}$$

$$\gamma = \frac{\alpha_T E}{1-\nu} = \alpha_T \frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu} \quad - \text{ для плоского напруженого стану.}$$

Задовольняючи за допомогою /2/ граничні умови /1/, доходимо до такого сингулярного інтегрального рівняння задачі:

$$\int_{L'} (\sigma_y + K_0 T) \frac{dt}{t-x} = \frac{4\pi\mu}{\alpha+1} \varphi(x), \quad x \in L' \quad /3/$$

при умові

$$\mathcal{P} = -\int_{L'} \sigma_y(t) dt + 2a\sigma_s, \quad /4/$$

де

$$K_0 = \frac{2\mu\gamma}{(\alpha+1)(\lambda+\mu)}; \quad \varphi(x) = \frac{x}{R} - \frac{\alpha+1}{4\pi\mu} \int_{L''} \frac{(K_0 T - \sigma_s)}{t-x} dt. \quad /5/$$

Надалі вважатимемо, що температура штампa, а отже, і граничних точок півплощини, що контактують зі штампом, стала та дорівнює T_0 . За цієї умови

$$\varphi(x) = \frac{x}{R} - \frac{(\kappa+1)(K_0 T_0 - \phi_s)}{4\pi\mu} \ln \frac{x-a}{x+a} \quad /6/$$

З допомогою функції

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} (\phi_y + K_0 T_0) \frac{dt}{t-z} \quad /7/$$

рівняння /3/ зводимо до задачі лінійного спряження:

$$W^+(x) + W^-(x) = -\frac{4\mu i}{\kappa+1} \varphi(x), \quad x \in L' \quad /8/$$

Наближений розв'язок задачі /8/ в класі обмежених функцій при $z = \pm \ell$ і $z = \pm a$ за умови, що виконується рівність

$$\frac{4\mu}{R(\kappa+1)} = \frac{4\ell^2 + a^2}{4\ell^3} (\phi_s - K_0 T_0), \quad /9/$$

дається формулою

$$W(z) = -\frac{2\mu i}{\kappa+1} \left[\frac{z}{R} + \frac{4\ell^3}{\pi R(4\ell^2 + a^2)} \ln \frac{z-a}{z+a} - \frac{2\sqrt{z^2 - \ell^2}}{R(4\ell^2 + a^2)} (2\ell^2 + z^2 - z\sqrt{z^2 - a^2}) \right] \quad /10/$$

На основі /10/ тиск $\phi_y(x)$ на L' дається формулою

$$\begin{aligned} \phi_y(x) &= -K_0 T_0 - \frac{8\mu\sqrt{\ell^2 - x^2}}{R(\kappa+1)(4\ell^2 + a^2)} (2\ell^2 + x^2 - x\sqrt{x^2 - a^2}), \\ &\quad x \in (-\ell, -a; a, \ell) \\ \phi_y(x) &= -\phi_s, \quad x \in (-a, a). \end{aligned} \quad /11/$$

Лінійні розміри пластичної смуги та контактної ділянки визначаються з умови /9/ та умови на безмежності. А це з використанням залежності /4/ приводить до співвідношення

$$\frac{\mu}{R(x+1)} = \frac{[P - 2a\sigma_3 - 2(\ell - a)K_0 T_0](4\ell^2 + a^2)}{\pi[9\ell^4 - (\ell^2 - a^2)^2] - 32a\ell^3} \quad /12/$$

Отже, при заданих P , σ_3 , T_0 , R , механічних і теплофізичних параметрах півплощини, формули /9/, /12/ і /11/ повністю розв'язують поставлену задачу, визначаючи a , ℓ та $\sigma_y(x)$ на $[-\ell, -a]$; $[a, \ell]$.

Зауваження. Формулу для тиску $\sigma_y(x)$ на $[-\ell, -a]$; $[a, \ell]$ можна дещо перетворити, користуючись одним із двох співвідношень /9/ або /12/. Якщо взяти, наприклад, співвідношення /12/ і в отриманому результаті для тиску прийняти, що довжина пластичної смуги дорівнює нулеві, то дістанемо точний розв'язок термопружної задачі про тиск нагрітого штампа на півплощину. Додатково приймаючи $T_0 = 0$, одержимо формулу для тиску під штампом у контактній задачі теорії пружності. Якщо ж скористатися залежністю /9/ і в отриманому результаті для тиску прийняти $x = a$, то, оскільки задача розв'язана наближено, ми не отримаємо очікуваного $\sigma_y(\pm a) = -\sigma_3$ а дістанемо результат, близький до цього, і тим точніший, чим менше a і більше ℓ .

1. Г а л и н Л.А., Ч е р е п а н о в Г.П. Контактная упруго-пластическая задача для пластин // Докл. АН СССР. 1967. Т.177, № 1. С.56-58. 2. Г р и л і ц ь к и й Д.В. Контактна термо-пружно-пластична задача для півплощини // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1973. Вип. 8, С.112-115. 3. Г р и л і ц ь к и й Д.В., П о п о в и ч Б.І. Плоскі контактні задачі термспружності. Львів, 1973.

Стаття надійшла до редколегії 10.01.88

Г.А.Шинкаренко

ПРО ОДНУ МОДИФІКАЦІЮ СХЕМИ НЬОМАРКА

1. Постановка задачі. Напівдискретизація початково-крайових задач /наприклад, про поширення хвиль у середовищах з внутрішнім тертям/ за просторовими змінними часто приводить до задачі Коші виду

$$\begin{aligned} Mu''(t) + Du'(t) + Au(t) &= f(t), \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) &= v_0 \quad t \in (0, T], \end{aligned} \quad /1.1/$$

дані якої характеризуються наступними властивостями:

$$u_0, v_0 \in V = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid |v| = \left(\sum_{i=1}^n v_i^2 \right)^{1/2} < +\infty \right\};$$

$$f \in L^2(0, T; V);$$

$$M, D, A - \text{симетричні додатновизначені матриці.} \quad /1.2/$$

Оскільки порядок n системи /1.1/, як правило, досить великий, то для її чисельного розв'язування найчастіше використовують рекурентну схему Ньюмарка [1, 2] /або, в іншій термінології, тришарову схему [3] /з параметрами $\beta, \gamma \geq 0$:

$$\begin{aligned} \{M + \Delta t \gamma D + \Delta t^2 \beta A\} u^{j+1} &= \Delta t^2 F_j - \\ - \{2M + \Delta t(2\gamma - 1)D + \Delta t^2(2\beta - \gamma - \frac{1}{2})A\} u^j &- \\ - \{M + \Delta t(\gamma - 1)D + \Delta t^2(\beta - \gamma + \frac{1}{2})A\} u^{j-1}, \quad j=0, 1, \dots, N, \end{aligned} \quad /1.3/$$

де u^k - наближене значення розв'язку $u_k = u(t_k)$ задачі /1.1/ у вузлах сітки $t_k = k\Delta t$, $k = 0, 1, \dots, N$, $N\Delta t = T$,

$$F_k = \beta f(t_{k+1}) + (\gamma - 2\beta + \frac{1}{2})f(t_k) + (\beta - \gamma + \frac{1}{2})f(t_{k-1}). \quad /1.4/$$

Для запуску схеми /1.3/ застосовують спеціальні стартові процедури відшукування u^0 та u^1 , які приводять до порушення балансу енергії та однорідності обчислювального процесу. Ми поставили собі за мету усунути вказаний недолік за рахунок вибору кусково-квадратичної апроксимації $u_{\Delta t}(t)$ розв'язку задачі /1.1/, де значення $u_{\Delta t}(t_j)$, $u'_{\Delta t}(t_j)$ та $u_{\Delta t}(t_{j+1})$ використовують для

побудови рекурентних співвідношень на кожному з інтервалів $[t_j, t_{j+1}]$. Така особливість дає змогу застосувати дану апроксимацію як для побудови стартової процедури схеми /1.3/, що точно враховує початкові умови задачі /1.1/, так і для модифікації самої схеми. Врешті, на основі енергетичних міркувань формулюємо достатню умову стійкості такої схеми і знаходимо апріорні оцінки швидкості збіжності наближених розв'язків.

2. Апроксимація. На кожному проміжку $[t_j, t_{j+1}]$ розв'язок задачі /1.3/ наближаємо поліномом

$$u_{\Delta t}(t) = [1 - \omega(t)] u^j + \Delta t \left[\frac{1}{2} \Delta t \omega'(t) - \omega(t) \right] v^j + \omega(t) u^{j+1} \quad /2.1/$$

з невідомими коефіцієнтами u^j , v^j і u^{j+1} ; тут $\omega(t) = (t - t_j)^2 / \Delta t^2$.

Беручи до уваги, що $u_{\Delta t}(t_k) = u^k / k = j, j+1$, $u'_{\Delta t}(t_j) = v^j$, прийmemo $v^{j+1} = u'_{\Delta t}(t_{j+1})$. Тоді

$$v^{j+1} = -v^j + 2(u^{j+1} - u^j) / \Delta t, \quad j = 0, 1, \dots \quad /2.2/$$

З урахуванням /2.2/ апроксимації /2.1/ дають змогу записати на кожному з проміжків $[t_j, t_{j+1}]$ рівняння

$$\begin{aligned} u_{\Delta t} &= u^{j+\frac{1}{2}} + \Delta t \left(\frac{1}{2} \Delta t \omega' - \frac{1}{2} \right) v^{j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \left(\omega - \frac{1}{2} \Delta t \omega' \right) \dot{v}^{j+\frac{1}{2}}, \\ u'_{\Delta t} &= v^{j+\frac{1}{2}} + \Delta t \left(\frac{1}{2} \Delta t \omega' - \frac{1}{2} \right) \dot{v}^{j+\frac{1}{2}}, \quad u''_{\Delta t} = \dot{v}^{j+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad /2.3/$$

Тут і далі використовуємо такі позначення:

$$\begin{aligned} q^{j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} (q^{j+1} + q^j), \quad \dot{q}^{j+\frac{1}{2}} = (q^{j+1} - q^j) / \Delta t, \\ q^{j+\tau} &= q^{j+\frac{1}{2}} + \Delta t \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \dot{q}^{j+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad /2.4/$$

Зауважимо також, що підстановка /2.1/ у початкові умови задачі /1.1/ дає змогу їх точно задовольнити за рахунок вибору

$$u^0 = u_0, \quad v^0 = v_0. \quad /2.5/$$

3. Проекційне рівняння. Нехай $\xi \in L^2((t_j, t_{j+1}))$ така, що $(\xi, 1)_0 = \int_{t_j}^{t_{j+1}} 1 \cdot \xi(\tau) d\tau \neq 0$. Підставляючи /2.3/ в рівняння задачі /1.1/, вимагаємо, щоб нев'язка цієї підстановки була ортогональна

до $\xi(t)$ в сенсі скалярного добутку простору $L^2((t_j, t_{j+1}))$.
Така вимога приводить до рівняння

$$M\dot{v}^{j+\frac{1}{2}} + Dv^{j+r} + A[u^{j+r} + \frac{1}{2}\Delta t^2(\beta-r)\dot{v}^{j+\frac{1}{2}}] = F_j, \quad j=0,1,\dots, \quad /3.1/$$

де

$$r = \frac{1}{2}\Delta t \frac{(\omega, \xi)_0}{(1, \xi)_0}; \quad \beta = \frac{(\omega, \xi)_0}{(1, \xi)_0}; \quad F_j = \frac{(f, \xi)_0}{(1, \xi)_0}. \quad /3.2/$$

На практиці часто достатньо прийняти

$$F_j = r f(t_{j+1}) + (1-r) f(t_j). \quad /3.3/$$

4. Рекурентна схема. Рівняння /3.1/, /2.2/ та /2.5/ утворюють рекурентну схему з параметрами Δt , β та r для розв'язування задачі Коші /1.1/. Обчислення пар $\varphi^{j+1} = (u^{j+1}, v^{j+1})$ за допомогою побудованої схеми можна провести за одним з трьох рівносильних алгоритмів:

$$\begin{aligned} Lu^{j+1} &= \Delta t^2 F_j + \{M + \Delta t r D + \frac{1}{2}\Delta t^2(\beta-1)A\} u^j + \\ &+ \Delta t \{M + \Delta t(r-\frac{1}{2})D + \frac{1}{2}\Delta t^2(\beta-r)A\} v^j, \\ v^{j+1} &= -v^j + 2(u^{j+1} - u^j)/\Delta t, \quad j=0,1,\dots \end{aligned} \quad /4.1/$$

$$\begin{aligned} Lv^{j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\Delta t(F_j - Au^j) + \{M + \Delta t(r-\frac{1}{2})D + \frac{1}{2}\Delta t^2(\beta-r)A\} v^j, \\ u^{j+1} &= u^j + \Delta t v^{j+\frac{1}{2}}, \quad v^{j+1} = 2v^{j+\frac{1}{2}} - v^j, \quad j=0,1,\dots \end{aligned} \quad /4.2/$$

$$\begin{aligned} Lv^{j+1} &= \Delta t(F_j - Au^j) + \{M + \Delta t(r-1)D + \frac{1}{2}\Delta t^2(\beta-2r)A\} v^j \\ u^{j+1} &= u^j + \frac{1}{2}\Delta t(v^{j+1} + v^j), \quad j=0,1,\dots, \end{aligned} \quad /4.3/$$

де матриця

$$L = M + \Delta t r D + \frac{1}{2}\Delta t^2 \beta A$$

додатно визначена щонайменше для $r, \beta \geq 0$. Зауважимо, що перші з рекурентних рівнянь /4.1/-/4.3/ лише правими частинами відрізняються від рівнянь схеми Ньюмарка /1.3/. Побудована схема

розв'язування задачі /1.1/ дає змогу на відміну від схеми /1.3/ проводити обчислення зі змінним кроком Δt .

Використовуючи енергетичний підхід [3], дослідимо властивості запропонованої схеми.

5. Стійкість. На просторі V визначимо норми

$$\|u\|_A = (Au, u)^{1/2}, \quad \|u\|_M = (Mu, u)^{1/2}, \quad \|u\|_D = (Du, u)^{1/2}, \quad /5.1/$$

а також

$$\|\varphi\| = \left\{ \|v\|_M^2 + \|u\|_A^2 \right\}^{1/2} \quad \forall \varphi = (u, v) \in V. \quad /5.2/$$

Домножуючи скалярно /3.1/ на $v^{j+\frac{1}{2}}$, після деяких перетворень приходимо до енергетичного рівняння

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta t} \left\{ \|\varphi^{j+1}\|^2 - \|\varphi^j\|^2 \right\} + \|v^{j+\frac{1}{2}}\|_D^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) \left\{ \|v^{j+1}\|_D^2 - \|v^j\|_D^2 \right\} + \Delta t (\beta - \gamma) \left\{ \|v^{j+1}\|_A^2 - \|v^j\|_A^2 \right\} + \\ & + \Delta t \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) \|v^{j+\frac{1}{2}}\|_A^2 = (F_j, v^{j+\frac{1}{2}}), \quad j = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Оскільки знайдеться $C = \text{const} > 0$, значення якої не залежить від вибору величини Δt , така, що

$$(F_j, v^{j+\frac{1}{2}}) \leq C |F_j|^2 + \frac{1}{2} \|v^{j+\frac{1}{2}}\|_D^2, \quad /5.3/$$

то останнє рівняння приводить до апіорних оцінок

$$\begin{aligned} & \|\varphi^{j+1}\|^2 + \Delta t \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) \|v^{j+1}\|_D^2 + 2\Delta t^2 (\beta - \gamma) \|v^{j+1}\|_A^2 \\ & \leq \|\varphi^j\|^2 + \Delta t \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) \|v^j\|_D^2 + 2\Delta t^2 (\beta - \gamma) \|v^j\|_A^2 + 2\Delta t C |F_j|^2, \quad j = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

/5.4/

На основі цього приходимо до висновку, що нерівності

$$\gamma \geq \frac{1}{2}, \quad \beta \geq \gamma$$

/5.5/

встановлюють достатні умови стійкості рекурентної схеми /3.1/, /2.2/ та /2.5/ незалежно від вибору кроку інтегрування Δt і при цьому справедливі оцінки /з $\mathcal{K} = \text{const} > 0$, що не залежить від Δt /

$$\begin{aligned} & \| \varphi^j \|^2 + \Delta t (\gamma - \frac{1}{2}) \| v^j \|^2 + 2\Delta t^2 (\beta - \gamma) \| v^j \|^2 \\ & \leq \mathcal{K} \{ |u_0|^2 + |v_0|^2 + T \| f \|_{L^\infty(Q_T; V)}^2 \}, \quad j = 1, \dots, N, \quad \mathcal{K} = \text{const} > 0. \end{aligned}$$

/5.6/

Другий та третій рядки /5.3/ показують, що побудована рекурентна схема має додаткову схемну в'язкість при $\gamma > \frac{1}{2}$ та додатковий перенос енергії при $\gamma > \frac{1}{2}$ та $\beta > \gamma$. Перша особливість дає змогу, зокрема, встановити стійкість даної схеми для випадку $D=0$.

6. Збіжність. Похибки апроксимації схеми

$$e^j = u^j - u(j\Delta t), \quad r^j = v^j - u'(j\Delta t) \quad /6.1/$$

задовольняють рівняння

$$Mr^{j+\frac{1}{2}} + Dr^{j+r} + A[e^{j+r} + \frac{1}{2}\Delta t^2(\beta - \gamma)r^{j+\frac{1}{2}}] = R_j,$$

$$r^{j+\frac{1}{2}} - e^{j+\frac{1}{2}} = Q_j, \quad j = 0, 1, \dots, \quad /6.2/$$

де

$$R_j = F_j - M\ddot{u}_{j+\frac{1}{2}} - D\dot{u}_{j+r} - A[u_{j+r} + \frac{1}{2}\Delta t^2(\beta - \gamma)\ddot{u}_{j+\frac{1}{2}}];$$

$$Q_j = \dot{u}_{j+\frac{1}{2}} - \dot{u}_{j+\frac{1}{2}}.$$

Величини з нижніми індексами обчислюють згідно /2.4/ за точними значеннями u_i , $\dot{u}_i = u'(j\Delta t)$.

Допускаючи, що розв'язок задачі /1.1/ такий, що $u \in C^4(0, T; V)$, розкладемо його в ряд Тейлора в околі точки $t = t_{j+\frac{1}{2}}$ і підставимо в останні рівності. Тоді, використовуючи рівняння задачі /1.1/, зведемо праві частини /6.2/ до вигляду

$$R_j = -\Delta t (\gamma - \frac{1}{2}) Mu''(t_{j+\frac{1}{2}}) + C_j \Delta t^2, \quad Q_j = \mathcal{K}_j \Delta t^2, \quad /6.3/$$

де значення констант C_j та $\mathcal{K}_j$ залежить лише від розв'язку u .

На основі енергетичних міркувань п.5 для безумовно стійкої схеми /3.1/, /2.2/, /2.5/ приходимо до апріорних оцінок швидкості збіжності похибок $\varepsilon^j = (e^j, r^j) \in V^2$:

$$\begin{aligned} \|\varepsilon^j\|^2 + \Delta t(\gamma - \frac{1}{2})\|r^j\|_D^2 + 2\Delta t^2(\beta - \gamma)\|r^j\|_1^2 &\leq \\ &\leq K T \Delta t^2 \left\{ (\gamma - \frac{1}{2})^2 + \Delta t^2 \right\}, \quad j = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad /6.4/$$

де значення $K = \text{const} > 0$ не залежить від вибору Δt , γ та β .

Таким чином, побудована рекурентна схема при виконанні умов /5.5/ має перший порядок збіжності, але вибір

$$\gamma = \frac{1}{2} + C \Delta t, \quad C = \text{const} > 0 \quad /6.5/$$

приводить до порядку збіжності, що дорівнює двом.

Значення параметра β не впливає на величину порядку збіжності наближених розв'язків, тому для спрощення рекурентних обчислень, наприклад за формулами /4.2/, доцільно прийняти $\beta = \gamma$.

7. Висновки та узагальнення. Т е о р е м а. Нехай $u(t)$ - розв'язок задачі Коші /1.1/ з властивостями /1.2/ і при цьому наявне включення $u \in C^4(0, T; V)$, $0 < T < +\infty$. Припустимо, також, що послідовності $(u^{j+1}, v^{j+1}) \in V^2$ будуються для відшукування наближеного розв'язку цієї задачі за допомогою рекурентної схеми /3.1/, /2.2/, /2.5/ з параметрами β , γ , $j = 1, \dots, N = T/\Delta t$.

Тоді при виконанні умов стійкості /5.5/ значення наближених розв'язків (u^j, v^j) збігаються відносно норми простору V до значень точного розв'язку $(u(j\Delta t), (u'(j\Delta t)))$ при $\Delta t \rightarrow 0$ і при цьому для похибок апроксимації /6.1/ мають місце апріорні оцінки швидкості збіжності /6.4/.

Зауважимо, що запропонований метод дискретизації та його обґрунтування без змін узагальнюється на наступний клас варіаційних задач:

задано $u_0 \in V$, $v_0 \in H$, $f \in L^2(0, T; H)$;

знайти $u \in L^2(0, T; V)$ таким, що

$$u' \in L^2(0, T; V), \quad u'' \in L^2(0, T; H),$$

$$m(u''(t), v) + d(u'(t), v) + a(u(t), v) = m(f(t), v),$$

$$a(u(0) - u_0, v) = 0, \quad m(u'(0) - v_0, v) = 0 \quad \forall v \in V,$$

/7.1/

де V - щільний підпростір гільбертового простору H , білінійна симетрична неперервна форма m /.../ /відповідно d /.../ та a /.../ /є H -еліптичною /відповідно V -еліптичними/.

Інші підходи до побудови рекурентних схем і методів їх дослідження наведені в [1,4,5].

1. Б а т е К., В и л с о н Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М., 1982.
2. З е н к е в и ч О., М о р г а н К. Конечные элементы и аппроксимация. М., 1986.
3. С а м а р с к и й А.А. Теория разностных схем. М., 1977.
4. Godlewski E., Puech-Raoult A. Equations d'évolution lineaires du second ordre et methodes multipas // RAIRO/Numer. Anal. 1979. 13. N4. P. 329-355.
5. Zienkiewicz O.C. Finite element method. London. 1977.

Стаття надійшла до редколегії 26.01.88

УДК 539.3

Л.Й.Ощипко

ОПТИМІЗАЦІЯ ФОРМИ КОНСТРУКЦІЇ, ЩО СКЛАДАЄТЬСЯ З ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ

Ставиться задача оптимального проектування за вагою на міцність осесиметричної конструкції, що складається зі сферичної оболонки радіуса R_1 , стріли підйому F , товщини h_1 , яка спряжена з циліндричною оболонкою радіуса R_2 , товщини h_2 ; довжини ℓ , що, в свою чергу, спряжена з конічною оболонкою довжини ℓ_1 , кутом конусності α і товщини h_3 /див. рисунок/.

Конструкція однорідна та знаходиться під рівномірним зовнішнім тиском $q = const$.

Задача оптимального проектування за вагою на міцність полягає в знаходженні

$$\min V(h_1, h_2, h_3, F, \alpha, S_1) = 2R_1 F h_1 + (S_2^2 - S_1^2) h_3 \sin \alpha + 2R_2 \ell h_2 + h_1^3 / 6$$

/1/

при обмеженнях

$$\sigma_{\text{екв}, \text{max}}^{\text{сф}} \leq [\sigma], \quad \sigma_{\text{екв}, \text{max}}^{\text{цил}} \leq [\sigma], \quad \sigma_{\text{екв}, \text{max}}^{\text{кон}} \leq [\sigma],$$

$$F + \ell + (S_2 - S_1) \cos \alpha \leq \beta, \quad \beta = const,$$

/2/

$$\sigma_{\text{екв}} = \max(\sigma_{\text{екв}}^{\pm}), \quad \sigma_{\text{екв}}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1^{\pm})^2 + (\sigma_2^{\pm})^2 + (\sigma_1^{\pm} - \sigma_2^{\pm})^2},$$

/3/

де σ_1^+ і σ_2^+ - нормальні напруження на поверхнях оболонок. Розрахунок конструкції проводимо аналогічно [2].

До регульованих параметрів вводять товщини оболонок h_1 , h_2 ,

h_3 , стрілу підйому сферичної оболонки F , кут конусності α і величину S_1 , що визначає довжину конічної оболонки $\ell_1 = S_2 - S_1$.

Задача /1/ - /3/ при використанні методів апроксимації функцій одночленними поліномами [1] і числових методів зводиться до задачі геометричного програмування [1]: мінімізувати

$$V(\bar{h})/\pi \approx C_1 h_1 h_4 + U_2(\bar{h}) + U_3(\bar{h}) \quad /4/$$

при обмеженнях

$$h_j > 0, \quad j = \overline{1,5},$$

$$U_4(\bar{h}) = \frac{\sigma_{\text{екв.сф}}^{\text{тах}}}{[\sigma]} \approx C_4 \prod_{j=1}^5 h_j^{a_{4j}} \leq 1,$$

$$U_5(\bar{h}) = \frac{\sigma_{\text{екв.цил}}^{\text{тах}}}{[\sigma]} \approx C_5 \prod_{j=1}^5 h_j^{a_{5j}} \leq 1,$$

$$U_6(\bar{h}) = \frac{\sigma_{\text{екв.кон}}^{\text{тах}}}{[\sigma]} \approx C_6 \prod_{j=1}^5 h_j^{a_{6j}} \leq 1,$$

$$S_1 = S_2 - (\beta - \ell - h_4) / \cos(h_5),$$

/5/

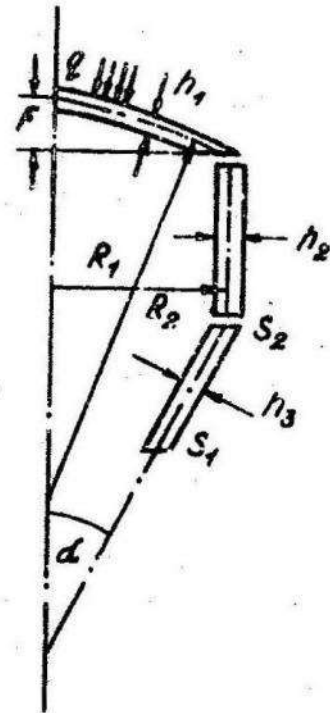
де

$$\bar{h} = \bar{h}(h_1, h_2, h_3, F, \alpha);$$

$$U_2(\bar{h}) = (S_2^2 - S_1^2) \sin(h_5) \cdot h_3 \approx C_2 \prod_{j=1}^5 h_j^{a_{2j}};$$

$$U_3(\bar{h}) = 2R_2 \ell h_2 + h_1^3 / 6 \approx C_3 \prod_{j=1}^5 h_j^{a_{3j}};$$

/6/



$$a_{ij} = \frac{h_j^*}{u_i(\bar{h}^*)} \frac{u_i(h_j^* + \Delta) - u_i(h_j^* - \Delta)}{2\Delta}, \quad i = \overline{2,6}, j = \overline{1,5};$$

$$C_1 = 2R_1, \quad C_i = u_i(\bar{h}^*) / \prod_{j=1}^5 h_j^{a_{ij}}, \quad i = \overline{2,6};$$

$\bar{h}^*$ - вихідна точка.

Відповідна двоїста програма полягає в максимізації

$$v(\bar{\delta}) = \prod_{i=1}^3 \left(\frac{C_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \prod_{i=4}^6 C_i^{\delta_i} \quad /7/$$

при обмеженнях

$$\delta_i \geq 0, \quad i = \overline{1,6}, \quad /8/$$

$$\sum_{i=1}^3 \delta_i = 1, \quad /9/$$

$$\sum_{i=1}^6 a_{ij} \delta_i = 0, \quad j = \overline{2,6}. \quad /10/$$

При розв'язанні задачі /7/ - /10/ використовували ітераційний процес, який полягає в тому, що за вихідну точку послідовно беруть попередні значення оптимальної точки, поки не виконуються нерівності

$$|\zeta_{\text{екв.мах}}^{\text{сф}} - [\zeta]| < \varepsilon,$$

$$|\zeta_{\text{екв.мах}}^{\text{цил}} - [\zeta]| < \varepsilon,$$

$$|\zeta_{\text{екв.мах}}^{\text{кан}} - [\zeta_i]| < \varepsilon.$$

На алгоритмічній мові ФОРТРАН складена програма, яка проводить пружний розрахунок конструкції, зводить задачу оптимального проек-

тування до задачі геометричного програмування, розв'язує двоїсту задачу геометричного програмування та здійснює пружний розрахунок конструкції в оптимальній точці.

При значеннях фіксованих параметрів

$$\begin{aligned} R_2 &= 19,45 \text{ мм}, & S_2 &= 38,9 \text{ мм}, & \ell &= 10 \text{ мм}, \\ [G] &= 0,9 \text{ кг/мм}^2, & [G] &= 0,6 \text{ кг/мм}^2, \end{aligned}$$

вихідній точці

$$\begin{aligned} h_1 &= 1,2 \text{ мм}, & h_2 &= 1 \text{ мм}, & h_3 &= 0,6 \text{ мм}, \\ F &= 2 \text{ мм}, & \alpha = \pi/6 &= 0,523538, & S_1 &= 18,9 \text{ мм} \end{aligned}$$

отримано такі оптимальні величини:

$$\begin{aligned} h_1 &= 1,678 \text{ мм}, & h_2 &= 1,464 \text{ мм}, & h_3 &= 0,685 \text{ мм}, \\ F &= 2,457 \text{ мм}, & \alpha &= 0,513454, & S_1 &= 30,18 \text{ мм}. \end{aligned}$$

1. Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование. М., 1972. 2. Ощипко Л.И. Оптимальный расчет оболочек ЕВП // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1984, Вип.22. С.49-53.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.88

УДК.539.3

А.В.Дубовик

АНАЛІЗ УМОВ СПРЯЖЕННЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ КОМБІНОВАНИХ МОДЕЛЕЙ

Складність аналізу складових конструкцій і комбінованих систем зумовлена тим, що в різних ділянках таких конструкцій можуть мати місце різні види напруженого стану - від одномірного до суттєво тримірного. Аналіз можна значно спростити, застосовувачи комбіновані математичні моделі теорії пружності. У рамках таких моделей передбачається, зокрема, залучення для опису напружено-деформованого стану в одних частинах тіла рівнянь теорії пружності, а в інших - рівнянь теорії оболонок. Праці, присвячені розробці комбінованих моделей, відрізняються способами запису граничних умов спряження, а також методами їхньої реалізації [2,5-7].

Проаналізуємо ефективність застосування різних методик врахування умов спряження для випадку задачі про плоску деформацію пружного тіла, спряженого з пластинкою.

1. Припустимо, що тіло займає двовимірну область Ω /рис.1/ з границею $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Пластинка має скінченну довжину ℓ

і постійну товщину h . Спряження відбувається вздовж ділянки границі Γ_2 ($\alpha=0$). Припускаємо, що частина границі Γ_2 прямолінійна та перпендикулярна до серединної поверхні пластинки.

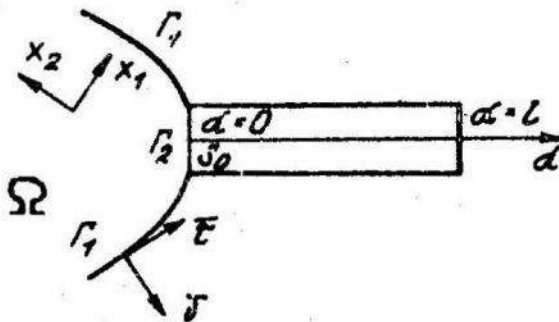


Рис. 1

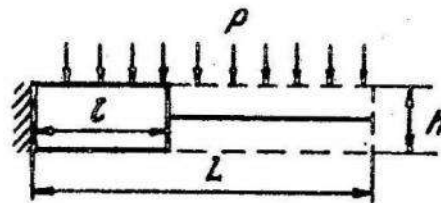


Рис. 2

Напружено-деформований стан НДС/ тіла описує система рівнянь [1]:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^{(n)}}{\partial x_2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1^{(n)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2^{(n)}}{\partial x_2^2} \right) &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^{(n)}}{\partial x_2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1^{(n)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2^{(n)}}{\partial x_2^2} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (x_1, x_2) \in \Omega$$

/1/

а НДС пластинки - рівняння [3]

$$\begin{aligned} B \frac{d^2 u_1^{(2)}}{d\alpha^2} + p_1 &= 0, \\ G \left(\frac{d\gamma_1}{d\alpha} + \frac{d^2 W}{d\alpha^2} \right) + p_n &= 0, \quad 0 \leq \alpha \leq l, \\ D \frac{d^2 \gamma_1}{d\alpha^2} - G \left(\gamma_1 + \frac{dW}{d\alpha} \right) + m_1 &= 0. \end{aligned}$$

/2/

Тут $u_1^{(n)}$, $u_2^{(n)}$ - переміщення точок пружного тіла; $u_1^{(2)}$, W , γ_1 - переміщення та кут повороту нормалі точок серединної поверхні пластинки; λ , μ , G , D , B - постійні, які характеризують властивості матеріалу тіла та жорсткостні властивості пластинки.

На границі Γ_1 області Ω , а також у точці $\alpha = l$ припустимо заданими граничні умови для пружного тіла і пластинки.

На границі Γ_2 задано кінематичні умови спряження, які виражають умови нерозривності переміщень

$$u_\tau^{(1)}(S) = W(0), \quad u_\nu^{(1)}(S) = u_\nu^{(2)}(0) + \chi_1(0)(S - S_0),$$

$$S_0 - \frac{h}{2} \leq S \leq S_0 + \frac{h}{2},$$

/3/

а також умови статичної рівноваги

$$\int_{S_0 - h/2}^{S_0 + h/2} \sigma_{\nu\nu}^{(1)} dS = T_1^{(2)}, \quad \int_{S_0 - h/2}^{S_0 + h/2} \sigma_{\nu\tau}^{(1)} dS = Q_1^{(2)}, \quad \int_{S_0 - h/2}^{S_0 + h/2} \sigma_{\nu\nu}^{(1)} (S - S_0) dS = M_1^{(2)},$$

/4/

де S - елемент дуги; σ_{ij} - компоненти тензора напружень, віднесені до пари векторів (ν, τ) ; $T_1^{(2)}$, $M_1^{(2)}$, $Q_1^{(2)}$ - компоненти вектора зусиль-моментів.

Коли припустити, що на границі тіла Γ_2 виконуються умови, які характерні для моделей типу пластинка Тимошенка /відсутнє обтіснення оболонки і нормаль зберігає прямолінійну форму після деформування/, то задоволення умови нерозривності переміщень зводиться до задоволення трьох умов у точці S_0 :

$$u_\tau^{(1)}(S_0) = W(0), \quad \frac{\partial u_\nu^{(1)}}{\partial \tau}(S_0) = \chi_1(0), \quad u_\nu(0) = u_\nu^{(2)}(0).$$

/5/

Таким чином, системи рівнянь /1/, /2/, доповнені відповідними граничними умовами, а також умовами нерозривності переміщень /3/ або /5/ і умовами статичної рівноваги /4/ на лінії спряження, становлять крайову задачу про плоску деформацію комбінованої моделі.

2. Розглянемо варіаційні постановки задачі. Внаслідок аддитивності енергії потенціальну енергію системи "пружне тіло - пластинка Тимошенка" можна зобразити у вигляді суми

$$\Pi_c = \Pi_T + \Pi_0,$$

/6/

де Π_T, Π_0 - функціонали потенціальної енергії тіла і пластинки [4,3].

Крайова задача /1/ - /4/ еквівалентна задачі про знаходження мінімуму функціоналу /6/ на полі геометрично можливих переміщень, які задовольняють кінематичні граничні умови, а також умови нерозривності переміщень.

При виконанні методу скінченних елементів для розв'язування рівняння $\delta \Pi_\epsilon = 0$ умови /3/ і /5/ записуємо у вигляді

$$[\bar{u}_j] = [\beta_1] [\bar{u}_j^0],$$

7a/

$$[\beta_2] [\bar{u}_j] = [\bar{u}_j^0].$$

7б/

Тут $\bar{u}_j, \bar{u}_j^0$ - вектори, які включають відповідні вузлові переміщення тіла і пластинки; $[\beta_1], [\beta_2]$ - матриці констант.

Припустимо, що u_j і u_j^0 - вектори, які містять незалежні вузлові переміщення тіла та пластинки.

Виконаємо перетворення координат

$$\begin{bmatrix} u_j \\ \bar{u}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ \bar{u}_j^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ \bar{u}_j^0 \end{bmatrix}$$

для випадку використання умов /3/, або

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_j^0 \\ u_j^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_2 & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_j \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_2 \\ \mathcal{J}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_j \\ u_j \end{bmatrix}$$

при застосуванні співвідношень /5/.

Для /3/ ця операція приводить до функціоналу потенціальної енергії пружного тіла

$$\begin{aligned} \Pi_T &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_j \\ \bar{u}_j^0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_T \\ Q_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ \bar{u}_j \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_j \\ \bar{u}_j^0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_T \\ Q_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ \bar{u}_j^0 \end{bmatrix} - \\ &- \begin{bmatrix} u_j \\ \bar{u}_j^0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_T \\ Q_T^* \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_j \\ \bar{u}_j^0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_T^* \\ Q_T^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ \bar{u}_j^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_j \\ \bar{u}_j^0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_T^* \\ Q_T^* \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

де K_T, K_T^*, Q_T, Q_T^* - матриці жорсткості та вектори правих частин до і після перетворення координат.

Аналогічні вирази можна отримати для перетворення функціоналу потенціальної енергії оболонки Π_0 при використанні співвідно-

шень /5/. Дальші перетворення, пов'язані з об'єднанням співвідношень для тіла й оболонки в єдину систему, є традиційними для методу скінченних елементів.

Існує можливість уникнути труднощів, пов'язаних з необхідністю задоволення умов спряження /3/ або /5/, використовуючи функціонал потенціальної енергії зі штрафом

$$\Pi_c = \Pi_T + \Pi_0 + \Pi_\varepsilon,$$

де Π_ε - штрафна складова

$$\Pi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_2} [\mathcal{U}_v^{(n)}(s) - \mathcal{U}_v^{(2)}(0) - \gamma_v(0)(s - s_0)]^2 d\Gamma_2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_2} [\mathcal{U}_\tau^{(n)}(s) - W(0)]^2 d\Gamma_2 \quad /8/$$

або

$$\Pi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ [\mathcal{U}_\tau^{(n)}(s_0) - W(0)]^2 + \left[\frac{\partial \mathcal{U}_v^{(n)}}{\partial \tau}(s_0) - \gamma_v(0) \right]^2 + [\mathcal{U}_v^{(n)}(s_0) - \mathcal{U}_v^{(2)}(0)]^2 \right\}.$$

Можна показати, що умови /3/, /5/ впливають з рівнянь Ейлера функціоналу /8/ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Можливе використання також варіантів, коли деякі умови спряження виконуються точно шляхом заміни системи координат у відповідних вузлах, а інші штрафуються.

3. Для визначення найбільш раціональної методики врахування умов спряження проводили порівняльні розрахунки для задачі про згин консольної балки /рис. 2/. Розрахунки стосувалися для випадку штрафкування всіх умов на переміщення, штрафкування тільки умов, які містять величину $\gamma_v(0)$, а також випадку безпосереднього врахування всіх геометричних умов спряження. Як бачимо, вдалий вибір параметра штрафу дає змогу отримати результати тотожні тим, які відстають при безпосередньому врахуванні обмежень на переміщення.

Таблица 1

x/L	G_{xy}			G_{xx}		
	ТП	I	П	ТП	I	П
$\emptyset, \emptyset$	-43,3	-43,3	-43,3	338	338	338
0,0625	5,06	5,08	5,15	267	267	266
0,125	-1,59	-1,81	-2,06	230	230	230
0,188	-1,86	-2,20	-4,99	197	198	199

Таблица 2

y/L	G_{xy}								
	$x = 0$			$x = 0,125$			$x = 0,250$		
	ТП	I	П	ТП	I	П	ТП	I	П
-0,05	-42,7	-42,6	-42,7	-1,59	-1,81	-2,06	-1,63	-1,67	11,6
-0,033	-16,9	-16,9	-16,9	-8,02	-8,02	-7,99			
-0,0167	4,24	4,24	4,23	-13,6	-13,5	-15,5			
0,0	6,41	6,41	6,42	-14,3	-14,3	-14,1	-12,0	-11,4	-20,2
0,0167	4,07	4,07	4,06	-13,6	-13,5	-13,5			
0,033	-17,3	-17,3	-17,3	-8,02	-8,02	-7,99			
0,05	-43,3	-43,3	-43,3	-1,59	-1,81	-2,06	-1,63	-1,67	-12,3

Таблица 3

y/L	G_{xx}								
	$x = 0$			$x = 0,125$			$x = 0,250$		
	ТП	I	П	ТП	I	П	ТП	I	П
-0,05	-337	-337	-337	-230	-230	-230	-168	-173	-180
-0,033	-211	-211	-211	-153	-153	-154			
-0,0167	-92,8	-92,8	-92,9	-77,2	-77,3	-77,7			
0,0	-0,5	-0,06	-0,06	0,02	0	0,04	0	0	-0,06
0,0167	92,8	82,7	92,8	77,2	77,3	77,7			
0,033	212	212	212	153	153	154			
0,05	338	338	338	230	230	230	168	173	181

На прикладі задачі про згин балки проводили також порівняльні розрахунки з метою визначення найбільш доцільної форми запису геометричних умов нерозривності /3/ або /5/. Результати одержані для значень $\frac{L}{\rho} = 4$, $\frac{E}{\rho} = 10^4$, $\nu = 0,3$, $h/L = 0,1$. При цьому застосовували штраф $\frac{1}{\varepsilon} = 10^3 \frac{E}{L}$.

У табл. 1 наведені величини напружень σ_{xy} , σ_{xx} на поверхні навантаження, отримані на основі моделі плоскої задачі теорії пружності /П/, а також виходячи з комбінованої моделі з застосуванням умов нерозривності переміщень у формі /5/ /графа I/ та /3/ /графа II/. Результати табл. 2,3 дають змогу судити про поведінку напружень σ_{xy} , σ_{xx} відповідно вздовж товщини оболонки. Дані свідчать про те, що з допомогою /5/ можна досягти кращих результатів, особливо в зонах поблизу лінії спряження після деформації. Однак при програмній реалізації використання співвідношень /5/ накладає суттєві обмеження на сітку скінченних елементів, яка покриває область Ω , тоді як застосування умов /3/ дає змогу проводити незалежні розбиття тіла та пластинки. Тому більш раціональним є застосування умов нерозривності переміщень на лінії спряження у формі /3/.

1. Дыяк И.И. Решение двумерных задач квазистатической термоупругости на основе применения высокоточных схем МКЭ: Автореф. дис... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1984. 2. Паутов А.Н., Шуваев Л.Н. Комбинированная расчетная модель осесимметричной оболочки в условиях контактного взаимодействия. Горький, 1984. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 8069 - 84. 3. Пелех Б.Л. Обобщенная теория оболочек. Львов, 1978. 4. Розин Л.А. Вариационные постановки задач для упругих систем. Л., 1978. 5. Шуваев Д.Н. Численный анализ взаимодействия оболочек с упругой средой // Мат. 4 науч. конф. молодых ученых мех.-мат. факультета. Горький, 1979, С. 199-211. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 2856 - 79 деп. 6. Surana K.S. Transition finite elements for axisymmetric stress analysis // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1980, 15, № 6, p. 809-832. 7. Surana K.S. Transition finite elements for three dimensional stress analysis // Int. J. Numer. Eng. 1980, 15, № 7, p. 991-1020.

Стаття надійшла до редколегії 10.05.88

ЗБІЖНІСТЬ ОДНОГО ІТЕРАЦІЙНОГО МЕТОДУ З ПОСЛІДОВНОЮ
АПРОКСИМАЦІЄЮ ОБЕРНЕНОГО ОПЕРАТОРА

Для розв'язування нелінійного рівняння

$$P(x) = x - \varphi(x) = 0$$

/1/

у банаховому просторі X ми запропонували та дослідили метод Ньютона з прискореною збіжністю [1]. Однак у ньому на кожній ітерації потрібно знаходити обернений оператор /розв'язувати лінійне операторне рівняння/, що не завжди легко зробити. Тому в [2], використовуючи ідею послідовної апроксимації оберненого оператора [3], побудовано метод, який не вимагає розв'язування лінійних задач. Спробуємо отримати умови й оцінки швидкості збіжності цього ітераційного методу.

Для розв'язування /1/ розглянемо ітераційний процес [2]

$$x_{n+1} = x_n - A_n P(x_n), \quad /2/$$

$$A_{n+1} = A_n \left[2E - P' \left(\frac{x_{n+1} + \varphi(x_{n+1})}{2} \right) A_n \right], \quad /3/$$

де E — одиничний оператор; x_0, A_0 — відповідно початкові наближення до точного розв'язку x^* рівняння /1/ і до оберненого оператора $A^* = [P'(x^*)]^{-1}$, $n = 0, 1, \dots$. Достатні умови збіжності процесу /2/, /3/ до x^* і A^* дає наступна теорема.

Теорема. Нехай: 1/ рівняння /1/ має розв'язок x^* і існує $A^* = [P'(x^*)]^{-1}$, причому $\|A^*\| \leq B$;
2/ у сфері $G^* = \{x: \|x - x^*\| \leq \beta z_0\}$, де $\beta = \max\{1, M\}$,
справедливі оцінки

$$\|\varphi'(x)\| \leq M; \quad \|P''(x) - P''(y)\| \leq N \|x - y\|;$$

$$3/ \quad \|P'(x^*)\| \leq C;$$

$$4/ \quad h_0 = \max \left\{ K_0; C + \frac{1+M}{2} L K_0 (B^2 + 2Bz_0 + z_0^2) \right\} \leq \frac{1}{z_0},$$

де

$$z_0 = \max \{ \|x_0 - x^*\|, \|A_0 - A^*\| \}; \quad L \geq \sup_{x \in \Omega_*} \|\rho''(x)\|;$$

$$K_0 = C + \frac{1+2M}{2} L (B+z_0) + \frac{1}{2^4} (B+z_0) N (1+M)^2 z_0.$$

Тоді послідовності $\{x_n\} : \{A_n\}$ збігаються відповідно до x^* і A^* , причому справедливі оцінки

$$z_n = \max \{ \|x_n - x^*\|, \|A_n - A^*\| \} \leq (h_0 z_0)^{2^n} z_0,$$

/4/

де $n=0,1,\dots$

Доведення. Із /2/ шляхом тотожних перетворень знаходимо

$$x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - A_n \rho(x_n) = x_n - x^* - A_n \times$$

$$\times \left\{ \rho' \left(\frac{x_n + \varphi_n}{2} \right) (x_n - x^*) + \int_0^1 \left(\rho' \left(\frac{x_n + \varphi_n}{2} + \tau \left(x_n - \frac{x_n + \varphi_n}{2} \right) \right) - \right.$$

$$\left. - \rho' \left(\frac{x_n + \varphi_n}{2} + \tau \left(x^* - \frac{x_n + \varphi_n}{2} \right) \right) \right) (1-\tau) d\tau \left(x_n - \frac{x_n + \varphi_n}{2} \right)^2 +$$

$$+ \int_0^1 \rho'' \left(\frac{x_n + \varphi_n}{2} + \tau \left(x^* - \frac{x_n + \varphi_n}{2} \right) \right) (1-\tau) d\tau \left[\left(x_n - \frac{x_n + \varphi_n}{2} \right)^2 - \right.$$

$$\left. - \left(x^* - \frac{x_n + \varphi_n}{2} \right)^2 \right] = \left[E - A_n \rho' \left(\frac{x_n + \varphi_n}{2} \right) \right] (x_n - x^*) -$$

$$- A_n \left[\int_0^1 \left(\rho' \left(\frac{x_n + \varphi_n}{2} + \tau \left(x_n - \frac{x_n + \varphi_n}{2} \right) \right) - \rho' \left(\frac{x_n + \varphi_n}{2} + \tau \left(x^* - \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{x_n + \varphi_n}{2} \right) \right) \right) (1-\tau) d\tau \left[\frac{x_n - x^*}{2} + \frac{\varphi_n - \varphi^*}{2} \right]^2 +$$

$$+ \int_0^1 \rho'' \left(\frac{x_n + \varphi_n}{2} + \tau \left(x^* - \frac{x_n + \varphi_n}{2} \right) \right) (1-\tau) d\tau (x_n - x^*) (\varphi_n^* - \varphi_n).$$

Оскільки

$$\begin{aligned} E - A_n \rho' \left(\frac{x_n^* + \varphi_n}{2} \right) &= A^* \rho' \left(\frac{x^* + \varphi^*}{2} \right) - A_n \rho' \left(\frac{x_n^* + \varphi_n}{2} \right) = \\ &= (A^* - A_n) \rho' \left(\frac{x^* + \varphi^*}{2} \right) + A_n \left(\rho' \left(\frac{x^* + \varphi^*}{2} \right) - \rho' \left(\frac{x_n^* + \varphi_n}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

і

$$\|A_n\| \leq \|A^*\| + \|A^* - A_n\| \leq B + \|A^* - A_n\|,$$

/5/

то, використовуючи умови 2 і 3 теореми, дістаємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| &\leq \left[C \|A_n - A^*\| + (B + \|A_n - A^*\|) \frac{1}{2} L(1+M) \times \right. \\ &\times \|x_n - x^*\| \left. + \frac{1}{2} (B + \|A_n - A^*\|) \left[\frac{N}{12} \|x_n - x^*\|^3 \right. \right. \\ &\times (1+M)^2 + L M \|x_n - x^*\|^2 \left. \right] = C \|A_n - A^*\| \|x_n - x^*\| + \\ &+ \frac{1}{2} B L (1+2M) \|x_n - x^*\|^2 + \frac{1}{2} L (1+2M) \|x_n - x^*\|^2 \|A_n - A^*\| + \\ &+ \frac{1}{24} (B + \|A^* - A_n\|) N (1+M)^2 \|x_n - x^*\|^3. \end{aligned}$$

/6/

З іншого боку,

$$\begin{aligned} A^* - A_{n+1} &= A^* - A_n \left(2E - \rho' \left(\frac{x_{n+1} + \varphi_{n+1}}{2} \right) A_n \right) = \\ &= A^* - A_n \left(E + \rho'(x^*) A^* - \rho' \left(\frac{x_{n+1} + \varphi_{n+1}}{2} \right) A_n \right) = \\ &= A^* - A_n \left(E + \rho'(x^*) (A^* - A_n) + \left(\rho'(x^*) - \rho' \left(\frac{x_{n+1} + \varphi_{n+1}}{2} \right) \right) A_n \right) = \\ &= E - A_n \rho'(x^*) (A^* - A_n) - A_n \left(\rho'(x^*) - \rho' \left(\frac{x_{n+1} + \varphi_{n+1}}{2} \right) \right) A_n = \\ &= (A^* - A_n) \rho'(x^*) (A^* - A_n) - A_n \left(\rho'(x^*) - \rho' \left(\frac{x_{n+1} + \varphi_{n+1}}{2} \right) \right) A_n \end{aligned} \quad /7/$$

Попередньо оцінимо норму

$$\begin{aligned} \|\rho'(x^*) - \rho'\left(\frac{x_{n+1} + \varphi_{n+1}}{2}\right)\| &\leq \|\rho''(\tilde{x})\| \left\|x^* - \frac{x_{n+1}}{2} - \frac{\varphi_{n+1}}{2}\right\| = \\ &= \|\rho''(\tilde{x})\| \left\|\frac{x^* - x_{n+1}}{2} + \frac{\varphi^* - \varphi_{n+1}}{2}\right\| \leq \frac{1}{2}L(1+M)\|x^* - x_{n+1}\|, \\ (\tilde{x} &= \frac{x_{n+1} + \varphi_{n+1}}{2} + \theta(x^* - \frac{x_{n+1} + \varphi_{n+1}}{2}), \quad 0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

/8/

З урахуванням /8/ із /7/ записуємо

$$\begin{aligned} \|A^* - A_{n+1}\| &\leq C\|A^* - A_n\|^2 + \frac{1}{2}L(1+M)\|x^* - x_{n+1}\| \times \\ &\times (B^2 + 2B\|A^* - A_n\| + \|A^* - A_n\|^2). \end{aligned}$$

/9/

Використовуючи оцінки /6/, /9/ і умову /4/, для $n=1$ маємо

$$\begin{aligned} z_1 = \max\{\|x_1 - x^*\|, \|A_1 - A^*\|\} &\leq \max\{C\|A_0 - A^*\|\|x_0 - x^*\| + \\ &+ \frac{1}{2}BL(1+2M)\|x_0 - x^*\|^2 + \frac{1}{2}L(1+2M)\|x_0 - x^*\|^2 \times \\ &\times \|A_0 - A^*\| + \frac{1}{24}(B + \|A^* - A_0\|)N(1+M)^2\|x_0 - x^*\|^3; \\ C\|A_0 - A^*\|^2 + \frac{1}{2}L(1+M)\|x^* - x_1\| &(B^2 + 2B\|A_0 - A^*\| + \|A_0 - A^*\|^2)\} \leq \\ &\leq \max\{Cz_0^2 + \frac{1}{2}(1+2M)BLz_0^2 + \frac{1+2M}{2}Lz_0^3 + \\ &+ \frac{1}{24}(B+z_0)N(1+M)^2z_0^3; Cz_0^2 + \frac{1+M}{2}L[Cz_0^2 + \frac{1}{2}(1+2M) \times \\ &\times BLz_0^2 + \frac{1+2M}{2}Lz_0^3](B^2 + 2Bz_0 + z_0^2)\} = \\ &= \max\{K_0; C + \frac{1+M}{2}LK_0(B^2 + 2Bz_0 + z_0^2)\}z_0^2 = (h_0z_0)^{2-1}z_0, \end{aligned}$$

тобто справедлива нерівність /4/.

Далі за допомогою математичної індукції легко одержати оцінку /4/ для довільного $n \geq 2$. Теорема доведена.

Наслідок. Виберемо $A_0 = [\rho'(\frac{x_0 + \varphi_0}{2})]^{-1}$, причому $\|A_0\| \leq B_0$.

Тоді

$$A^* - A_0 = [\rho'(x^*)]^{-1} - [\rho'(\frac{x_0 + \varphi_0}{2})]^{-1} = [\rho'(\frac{x_0 + \varphi_0}{2})]^{-1} \times \\ \times [\rho'(\frac{x_0 + \varphi_0}{2}) - \rho'(x^*)][\rho'(x^*)]^{-1}$$

і

$$\|A^* - A_0\| \leq B_0 L B \frac{1+M}{2} \|x^* - x_0\|.$$

Таким чином, у теоремі можна взяти

$$\tau_0 = m \|x^* - x_0\|,$$

де

$$m = \max \left\{ 1, B_0 L B \frac{1+M}{2} \right\}.$$

Відзначимо, якщо $M < 1$, то для x_0 , достатньо близького до x^* , h_0 буде меншим, ніж відповідне h_c з теореми праці [3]. Тому ітераційний процес /2/, /3/ збігатиметься швидше, ніж метод, запропонований у [3]. Кількість обчислень на одній ітерації в обох методах однакова.

Отже, метод /2/, /3/ ефективніший від методу з [3].

І. Б а р т и ш М.Я., Ш а х н о С.М. О методе Ньютона с ускоренной сходимостью //Вестн. Киев. ун-та. Моделирование и оптимизация сложных систем. 1987. Вып. 6. С.62-66. 2. Б а р т и ш М.Я., Ш а х н о С.М. Модификации ускоренного метода Ньютона с последовательной и параллельной аппроксимациями обратного оператора //Распараллеливание обработки информации: Тез. докл. VI Всесоюз. школы-семинара. Львов, 1987. С.111-112. 3. У л ь м С.Ю. Об итерационных методах с последовательной аппроксимацией обратного оператора //Изв. АН СССР. Физика, математика. 1967. 16. № 4. С.403-411.

Стаття надійшла до редколегії 12.09.88

П.П.Вагін, І.С.Муха, Я.Г.Савула
 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИХ
 ЗАДАЧ СТАТИКИ ОБОЛОНОК ТИПУ ТИМОШЕНКА
 МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Шляхи побудови різних нелінійних теорій оболонок ґрунтуються на рівняннях нелінійної теорії пружності [5]. Існує достатньо велика кількість праць, в яких наведені також різні варіанти рівнянь нелінійної теорії оболонок. Для розв'язання практичних задач необхідна система рівнянь, яка була б зручною при використанні числових методів. Такі системи, що ґрунтуються на класичній гіпотезі Кірхгофа-Ляме, наведені в [2]. Побудові геометрично нелінійних рівнянь узагальненої теорії оболонок присвячені дослідження [1,3,4].

Нехай переміщення U_1, U_2, U_3 довільної точки з координатами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ / $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega, -h/2 \leq \alpha_3 \leq h/2$ / визначаються через переміщення u, v, w і кути повороту γ_1, γ_2 за формулами [7]

$$U_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = u_i(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \gamma_i(\alpha_1, \alpha_2), \quad i=1,2,$$

$$U_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = w(\alpha_1, \alpha_2).$$

За вихідні приймаємо такі вирази для деформацій [6]:

$$\tilde{\varepsilon}_{11} = e_{11} + \frac{1}{2} \left[e_{11}^2 + \left(\frac{1}{2} e_{12} + \omega_3 \right)^2 + \left(\frac{1}{2} e_{13} - \omega_2 \right)^2 \right],$$

$$\tilde{\varepsilon}_{12} = e_{12} + e_{11} \left(\frac{1}{2} e_{12} - \omega_3 \right) + e_{22} \left(\frac{1}{2} e_{12} + \omega_3 \right) + \left(\frac{1}{2} e_{13} - \omega_2 \right) \cdot \left(\frac{1}{2} e_{23} + \omega_1 \right), \quad (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3),$$

де e_{ij} і ω_k - компоненти деформації та кути повороту, які в довільній ортогональній системі координат записуються у вигляді

$$e_{11} = \frac{\partial_1 U_1}{H_1} + \frac{U_2}{H_1 H_2} \partial_2 H_1 + \frac{U_3}{H_1 H_3} \partial_3 H_1,$$

$$e_{12} = \frac{H_2}{H_1} \partial_1 \frac{U_2}{H_2} + \frac{H_1}{H_2} \partial_2 \frac{U_1}{H_1},$$

$$2\omega_1 = \frac{1}{H_1 H_3} (\partial_2 H_3 U_3 - \partial_3 H_2 U_2), \quad (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)$$

Тут H_i - параметри Ламе; $q = \partial/\partial\alpha_i$. Надалі вважатимемо, що серединна поверхня оболонки віднесена до ортогональних криволінійних координат. У вибраній системі координат параметри Ламе мають вигляд

$$H_1 = A_1(1 + \alpha_3 K_1), \quad H_2 = A_2(1 + \alpha_3 K_2), \quad H_3 = 1, \quad /4/$$

де $A_i = A_i(\alpha_1, \alpha_2)$ - коефіцієнти першої квадратичної форми серединної поверхні; K_i - головні її кривини.

Припускаємо, що параметри e_{ij} і поворот ω_3 елемента оболонки - малі величини більш високого порядку, ніж повороти ω_1 та ω_2 відносно α_1 і α_2 координатних ліній [2,8]. Тоді співвідношення /2/ з урахуванням гіпотез Тимошенка можна представити

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{11} &= e_{11} + \frac{1}{2} \omega_2^2, & \tilde{\varepsilon}_{22} &= e_{22} + \frac{1}{2} \omega_1^2, \\ \tilde{\varepsilon}_{12} &= e_{12} - \omega_1 \omega_2, & \tilde{\varepsilon}_{13} &= e_{13}, \quad \tilde{\varepsilon}_{23} = e_{23}. \end{aligned} \quad /5/$$

Заміняючи в /5/ згідно з /3/ компоненти деформації e_{ij} та повороти ω_k і враховуючи при цьому формули для визначення параметрів Ламе /4/ та закон зміни переміщень по товщині /1/, одержуємо

$$\tilde{\varepsilon}_{11} = (e_1 + \frac{1}{2} \dot{\omega}_2^2 + \alpha_3 (\varkappa_1 + \dot{\omega}_2 \dot{\omega}_2 - \frac{1}{2} K_1 \dot{\omega}_2^2)) / (1 + \alpha_3 K_1),$$

$$\tilde{\varepsilon}_{22} = (e_2 + \frac{1}{2} \dot{\omega}_1^2 + \alpha_3 (\varkappa_2 + \dot{\omega}_1 \dot{\omega}_1 - \frac{1}{2} K_2 \dot{\omega}_1^2)) / (1 + \alpha_3 K_2),$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{12} &= (e_{12} - \dot{\omega}_1 \dot{\omega}_2 + 2\alpha_3 (\varkappa_{12} - \frac{1}{2} \dot{\omega}_1 \dot{\omega}_2 - \\ &\quad - \frac{1}{2} \dot{\omega}_1 \dot{\omega}_2)) / ((1 + \alpha_3 K_1)(1 + \alpha_3 K_2)), \end{aligned}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{13} = e_{13} / (1 + \alpha_3 K_1), \quad \tilde{\varepsilon}_{23} = e_{23} / (1 + \alpha_3 K_2).$$

/6/

Формули /6/ - це геометричні співвідношення для гнучких оболонок,
де

$$\omega_1^0 = \frac{1}{2}(-K_2 u_2 + \frac{1}{A_2} \partial_2 W - \gamma_2); \quad \omega_1^1 = -K_2 \gamma_2;$$

$$\omega_2^0 = \frac{1}{2}(K_1 u_1 - \frac{1}{A_1} \partial_1 W + \gamma_1); \quad \omega_2^1 = K_1 \gamma_1, \quad /7/$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_{12}$ - компоненти деформацій лінійної теорії оболонок, які наведені в [7].

Рівняння рівноваги геометрично нелінійної теорії оболонок і статичні граничні умови впливають в принципі Лагранжа, згідно з яким робота δA внутрішніх сил на варіаціях переміщень дорівнює роботі δL зовнішніх сил на цих же варіаціях

$$\delta A = \delta L, \quad /8/$$

$$\text{де } \delta A = \iint_{\Omega} \left[\int_{-h/2}^{h/2} (\phi_{11} \delta \tilde{\varepsilon}_{11} + \phi_{22} \delta \tilde{\varepsilon}_{22} + \phi_{12} \delta \tilde{\varepsilon}_{12} + \phi_{13} \delta \tilde{\varepsilon}_{13} + \phi_{23} \delta \tilde{\varepsilon}_{23}) \times \right. \\ \left. \times (1 + \alpha_3 K_1)(1 + \alpha_3 K_2) d\alpha_3 \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2; \quad /9/$$

$$\delta L = \iint_{\Omega} \left[\int_{-h/2}^{h/2} F \delta U (1 + \alpha_3 K_1)(1 + \alpha_3 K_2) d\alpha_3 \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ + \int_{\Gamma} \phi_j \delta U (1 + \alpha_3 K_t) ds + \iint_{\Omega} \phi_j^{h/2} \delta U^{h/2} (1 + \frac{h}{2} K_1)(1 + \frac{h}{2} K_2) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ + \iint_{\Omega} \phi_j^{-h/2} \delta U^{-h/2} (1 - \frac{h}{2} K_1)(1 - \frac{h}{2} K_2) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2, \quad /10/$$

де Γ - границя області серединної поверхні; U - вектор переміщень оболонки як тривимірного тіла, K_t - нормальна кривина серединної поверхні за напрямком дотичної до кривої Γ . Співвідношення /10/ є сумою робіт об'ємної F та поверхневих сил ϕ_j , прикладених до бокової, верхньої ($\alpha_3 = h/2$) і нижньої ($\alpha_3 = -h/2$) поверхонь оболонки.

Вводячи у /8/ замість напруження ϕ_{ij} їх інтегральні характеристики [6] і прирівнюючи коефіцієнти при незалежних варіаціях, отримуємо рівняння рівноваги

$$\partial_1 A_2 T_1 - T_2 \partial_1 A_2 + \frac{1}{A_1} \partial_2 A_1^2 S + H K_2 \partial_2 A_1 + \partial_2 H K_1 A_1 + K_1 A_1 A_2 Q_1^* = -A_1 A_2 P_1,$$

$$\partial_2 A_1 T_2 - T_1 \partial_2 A_1 + \frac{1}{A_2} \partial_1 A_2^2 S + H K_1 \partial_1 A_2 + \partial_1 H K_2 A_2 + K_2 A_1 A_2 Q_2^* = -A_1 A_2 P_2,$$

$$T_1 K_1 + T_2 K_2 - \frac{1}{A_1 A_2} (\partial_1 Q_1^* A_2 + \partial_2 Q_2^* A_1) = P_3,$$

$$\partial_1 A_2 M_1 - M_2 \partial_1 A_2 + H \partial_2 A_1 + \partial_2 H A_1 - A_1 A_2 Q_1^{**} + A_1 A_2 K_1 (H \dot{\omega}_1 - M_1 \dot{\omega}_2) = -A_1 A_2 \dot{m}_1,$$

$$\partial_2 A_1 M_2 - M_1 \partial_2 A_1 + H \partial_1 A_2 + \partial_1 H A_2 - A_1 A_2 Q_2^{**} + A_1 A_2 K_2 (M_2 \dot{\omega}_1 - H \dot{\omega}_2) = -A_1 A_2 \dot{m}_2,$$

$$Q_1^* = Q_1 - \frac{1}{2} [(T_1 - K_1 M_1) \dot{\omega}_2 + M_1 \dot{\omega}_2 - S \dot{\omega}_1 - H \dot{\omega}_1], \quad /11/$$

$$Q_1^{**} = Q_1 + \frac{1}{2} [(T_1 + K_1 M_1) \dot{\omega}_2 + M_1 \dot{\omega}_2 - (S + 2K_1 H) \dot{\omega}_1 - H \dot{\omega}_1],$$

$$Q_2^* = Q_2 + \frac{1}{2} [(T_2 - K_2 M_2) \dot{\omega}_1 + M_2 \dot{\omega}_1 - S \dot{\omega}_2 - H \dot{\omega}_2],$$

$$Q_2^{**} = Q_2 - \frac{1}{2} [(T_2 + K_2 M_2) \dot{\omega}_1 + M_2 \dot{\omega}_1 - (S + 2K_2 H) \dot{\omega}_2 - H \dot{\omega}_2],$$

$$P_i = (1 + K_i \frac{h}{2}) (1 + K_2 \frac{h}{2}) \phi_i^+ - (1 - K_i \frac{h}{2}) (1 - K_2 \frac{h}{2}) \phi_i^- + \int_{-h/2}^{h/2} F_i (1 + \alpha_3 K_1) (1 + \alpha_3 K_2) d\alpha_3,$$

$$\dot{m}_j = \frac{h}{2} [(1 + K_1 \frac{h}{2}) (1 + K_2 \frac{h}{2}) \phi_j^+ - (1 - K_1 \frac{h}{2}) (1 - K_2 \frac{h}{2}) \phi_j^-] + \int_{-h/2}^{h/2} F_j \alpha_3 (1 + \alpha_3 K_1) (1 + \alpha_3 K_2) d\alpha_3,$$

$i = 1, 2, 3 ; \quad j = 1, 2$
і статичні крайові умови

$$T_t = T_1 \cos^2 \lambda + S \sin 2\lambda + T_2 \sin^2 \lambda + (K_1 + K_2) H \sin 2\lambda / 2,$$

$$T_s = (T_2 - T_1) \sin 2\lambda + S \cos 2\lambda + (K_2 \cos^2 \lambda - K_1 \sin^2 \lambda) H,$$

$$Q_n = Q_1^* \cos \lambda + Q_2^* \sin \lambda,$$

$$M_t = M_1 \cos^2 \lambda + H \sin 2\lambda + M_2 \sin^2 \lambda,$$

$$M_s = (M_2 - M_1) \sin 2\lambda / 2 + H \cos 2\lambda. \quad /12/$$

У формулах /II/ T_t , T_s , Q_n - нормальне, зсувне і перері-
зуюче зусилля; M_t , M_s - згинальний і крутний моменти; λ -
кут між лінією α_1 і нормаллю до границі Ω .

Система рівнянь /6/, /II/, /12/ доповнюється граничними умова-
ми у переміщеннях і відповідними співвідношеннями між внутрішніми
зусиллями, моментами та компонентами деформації. Для трансверсаль-
но-ізотропної оболонки вони наведені у [6].

При використанні методу скінченних елементів основні співвід-
ношення теорії оболонок зручно записувати в матричному вигляді.
Для цього побудуємо матриці-стовпці зовнішнього навантаження P ,
переміщень U , деформацій ε , симетричних зусиль-моментів
 σ і номінальних зусиль-моментів σ^* :

$$P = (P_1, P_2, P_3, \dot{m}_1, \dot{m}_2)^T,$$

$$U = (u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2)^T,$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12})^T,$$

$$\sigma = (T_1, T_2, S, Q_1, Q_2, M_1, M_2, H)^T,$$

$$\sigma^* = (T_1, T_2, S, Q_1^*, Q_2^*, M_1, M_2, H)^T. \quad /13/$$

Тепер неважко побудувати матриці диференціальних операторів C_Ω ,
 C , C_R і константи E_Ω , B , G_1 , G_2 , за допомогою яких
повну систему рівнянь представимо у такому вигляді:

співвідношення між деформаціями та переміщеннями

$$\varepsilon = C U + \frac{1}{2} (C_\Omega U)^T E_\Omega C_\Omega U;$$

/14/

рівняння рівноваги

$$C_R \epsilon = \rho; \quad /15/$$

закон пружності

$$\epsilon = B \epsilon; \quad /16/$$

статичні та геометричні крайові умови

$$G_1 \epsilon^* = \epsilon^b, \quad G_2 U = U^b \quad /17/$$

Тут $\epsilon^b = (T_t^b, T_s^b, Q_n^b, M_t^b, M_s^b)^T$ - матриця-стовпець заданих крайових зусиль-моментів; $U^b = (u_t^b, u_s^b, w^b, \gamma_t^b, \gamma_s^b)^T$ - крайові зміщення.

Задача /14/ - /17/ еквівалентна задачі мінімізації функціоналу

$$\Pi(U) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon^T(U) B \epsilon(U) d\Omega - \int_{\Omega} U^T \rho d\Omega - \int_{\Gamma} (G_2 U)^T \epsilon^b d\Gamma \quad /18/$$

на множині функцій з простору $W_2'(\Omega)$ [7], які задовольняють геометричні крайові умови. Для мінімізації нелінійного функціоналу /18/ використовуємо метод Ньютона. Розкладаємо функціонал /18/ в ряд Тейлора. Відкидаючи члени другого і вищих порядків малості, дістаємо варіаційне рівняння

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\epsilon(U + \delta U) - \epsilon(U)]^T B [\epsilon(U + \delta U) - \epsilon(U)] d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} [\epsilon(U + \delta U) - \epsilon(U)]^T B \epsilon(U) d\Omega - \int_{\Omega} (\delta U)^T \rho d\Omega - \\ & - \int_{\Gamma} (G_2 \delta U)^T \epsilon^b d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad /19/$$

У варіаційне рівняння /19/ входять перші похідні від переміщень. Тому апроксимуючі функції методу скінченних елементів повинні задовольняти умови неперервності на міжелементній границі. Згідно з цим розіб'ємо область Ω на криволінійні чотирикутники. На кожному з них представимо невідомі функції переміщень за допомогою біквадратичних ізопараметричних апроксимацій у вигляді

$$U = Nq, \quad /20/$$

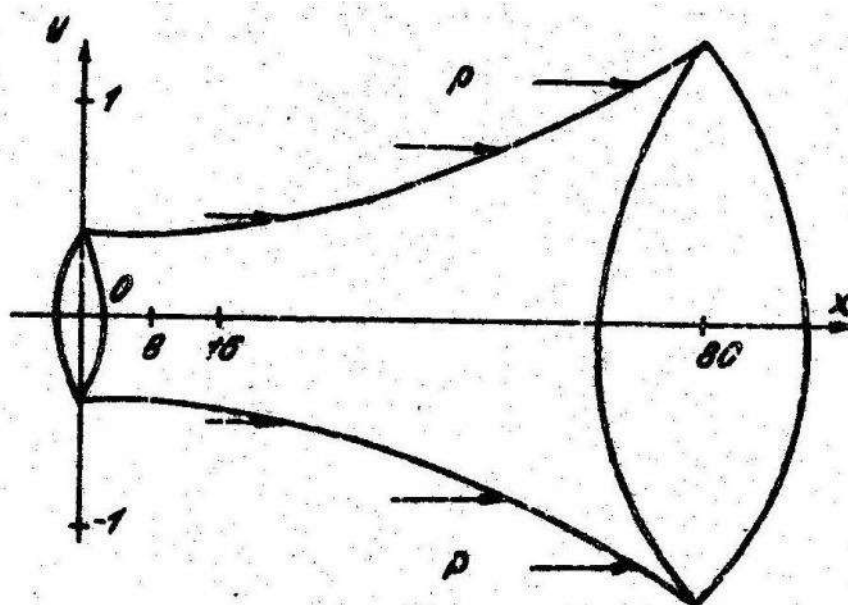


Рис. 1

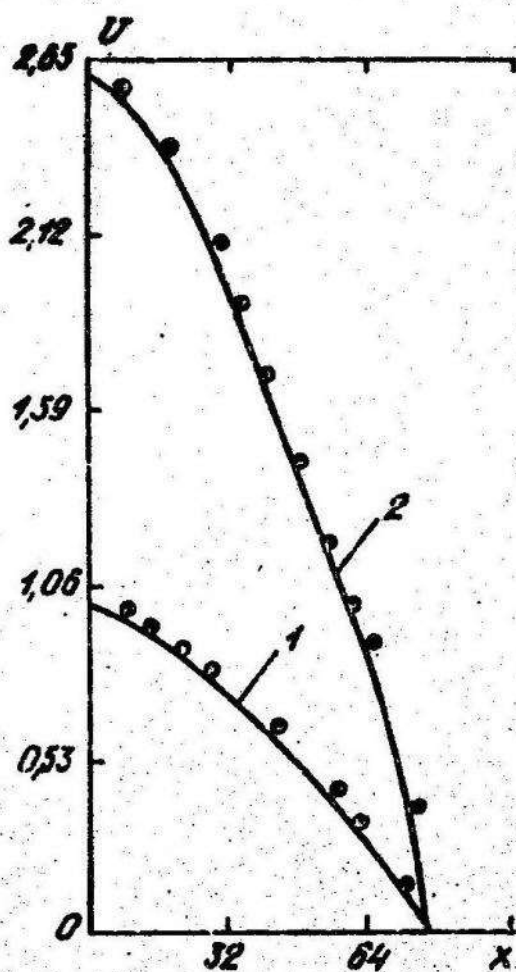


Рис. 2

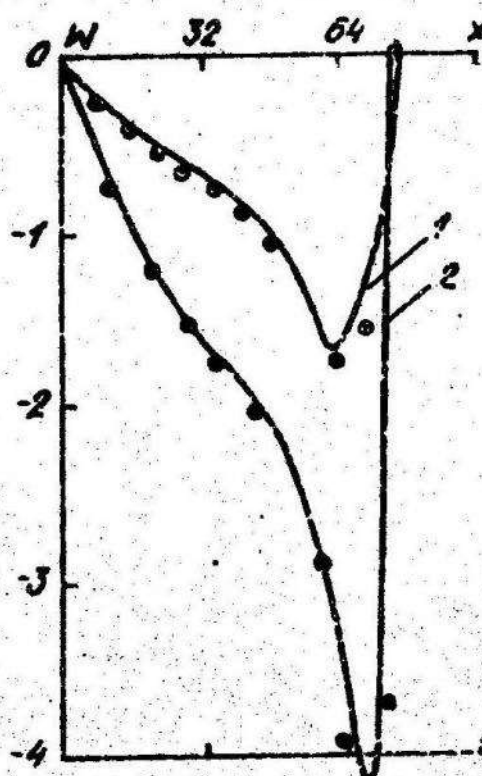


Рис. 3

де N - матриця з апроксимуючих функцій, q - вектор невідомих вузлових переміщень.

Підставляючи /14/, /20/ в /19/, приходимо до рекурентної схеми для розв'язку нелінійної системи рівнянь:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [(C + (C_2 N q)_\theta^T E_\Omega C_\Omega) N] B [C + (C_2 N q)_\theta^T E_\Omega C_\Omega] N_\theta q d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} [(C + (C_2 N q)_\theta^T E_\Omega C_\Omega) N] B [C + \frac{1}{2} (C_2 N q)_\theta^T E_\Omega C_\Omega] N_\theta q d\Omega - \\ & - \int_{\Omega} N^T P d\Omega - \int_{\Gamma} (C_2 N) \delta^b d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad /21/$$

Якщо в /21/ прийняти $q = 0$, то отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно Δq для розв'язку задач лінійної теорії оболонок.

Як приклад розглянемо оболонку, утворену обертанням ланцюгової лінії $y' = a \cos x / a$ /рис. 1/ навколо осі OX , середина поверхні якої є поверхнею обертання змінної від'ємної гаусової кривини $K_1 = -a/y^2$. Контур оболонки $x=0$ вільний, а контур $x=b$ - жорстко закріплений. Оболонка деформується під дією рівномірно розподіленого осьового поверхневого навантаження P . Задачу розв'язували при таких вхідних даних: $a = 40$ см;

$b = 80$ см; $h = 2$ см; $P = 17$ кг/см; модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона відповідно дорівнюють $7 \cdot 10^5$ кг/см² і 0,3. На рис. 2,3 показані графіки переміщень u , та w серединної поверхні оболонки; 1, 2-числові розв'язки за лінійною та нелінійною теоріями. Точками позначено розв'язок, наведений у [2].

1. Г а л и м о в К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань, 1975. 2. Г р и г о р е н к о Я.М., М у к о е д А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. К., 1983. 3. Г р и г о р е н к о Я.М., М у к о е д А.П. Один подход к построению нелинейных уравнений уточненной теории оболочек // Докл. АН УССР. Сер. А. 1984. № 12. С.38-42. 4. Г р и г о л ю к З.М., М а м а я В.Н. Вариант уравнений для исследования нелинейного деформирования тонкостенных оболочек произвольного вида // Проблемы прочности. 1985. № 10. С.19-30. 5. Н о в о ж и л о в В.В. Основы нелинейной теории упругости. Л., 1948. 6. П е л е х Б.Л. Обобщенная теория оболочек. Львов, 1978. 7. С т р е н г Г., Ф и к с Дж. Теория метода конечных элементов. М., 1977. 8. Ш а н о в а л о в Л.А. Об одном простейшем варианте уравнений геометрически нелинейной теории тонких оболочек // Инж. журн. Механика твердого тела. 1968. № 1. С.56-62.

Стаття надійшла до редколегії 15.09.88

П.С.Венгерський

КОМПЛЕКС ПРОГРАМ РЕАЛІЗАЦІЇ ІНТЕРВАЛЬНИХ ІТЕРАЦІЙНИХ
ПРОЦЕСІВ НА ЕС ЕОМ

Для проведення обчислень під час розв'язування багатьох математичних задач необхідно враховувати похибки різних типів /похибки вхідних даних, похибки методу, округлень/. Інтервальний аналіз, вперше введений Муром [8], дає змогу врахувати похибки обчислень. Однак при реалізації інтервальних арифметичних операцій на ЕОМ знову виникають похибки округлень. Це змушує апроксимувати операції точною інтервальною арифметикою, тобто створити машинну арифметику, яка повинна гарантувати, що шуканий результат не виходить за межі одержаного інтервалу. Особливість реалізації машинної арифметики на ЕОМ серії ЕС полягає в тому, що при арифметичних обчисленнях розряди операндів, які виходять за розрядну сітку ЕОМ, відкидаються. У зв'язку з цим для поправки результатів арифметичних операцій ліва та права границі результуючого інтервалу зсуваються на одиницю молодшого розряду числа залежно від знаку та порядку цього числа.

Існує ряд комплексів програм для реалізації різних видів машинної інтервальної арифметики [7, 10, 11]. Створені навіть спеціальні алгоритмічні мови *TRIPLEX-ALGOL-60*, *AUGMENT*, і *FORTRAN*, але вони розраховані на конкретні ЕОМ або для розв'язування конкретного типу задач. Для машин серії ЕС розроблено транслятор обчислення алгебраїчних виразів [2] і комплекс програм для автоматизації доведень у математиці [4].

У наш комплекс програм входять програми, які виконують:

- а/ арифметичні операції над інтервалами /додавання, віднімання, множення, ділення/;
- б/ логічні операції над інтервалами;
- в/ допоміжні операції /обчислення модуля інтервалу, ділення інтервалу навпіл, формування інтервалу/;
- г/ різні типи поділу n -мірного паралелепіпеда [9];
- д/ інтервальні розширення елементарних математичних функцій.

У комплекс входять також програми-алгоритми для розв'язування нелінійних систем рівнянь.

Нехай $I(R)$ - множина інтервалів на R . Тоді R_M - множина машинних чисел і, якщо

$$A = [\underline{a}, \bar{a}] \in I(R),$$

то

$$\inf R_M < \underline{a} < \bar{a} < \sup R_M.$$

Позначаємо: $\downarrow x$ - число x , округлене з недостаткою;
 $\uparrow x$ - число x , округлене з надлишком. Тоді правило запису інтервального числа $A \in R_M$

$$\downarrow : I(R) \ni A \rightarrow \downarrow A = [\downarrow \underline{a}, \uparrow \bar{a}] =$$

$$= \{x \in R_M \mid \downarrow \underline{a} \leq x \leq \uparrow \bar{a}, \downarrow \underline{a}, \uparrow \bar{a} \in R_M\}.$$

Для операції $\downarrow$ виконуються наступні властивості [3]:

1. $A \subset \downarrow A, \forall A \in I(R)$.
2. Якщо $A \subset B$, то $\downarrow A \subset \downarrow B$.
3. Якщо $A, B \in I(R_M)$, $*$ $\in \{+, -, \cdot, /\}$, то $\downarrow (A * B) \subset I(R_M)$.
4. Якщо $A, B, C, D \in I(R_M)$, то $(A \subset B, C \subset D) \Rightarrow \downarrow (A * C) \subset \downarrow (B * D)$.

З наведених властивостей випливає справедливості основної теореми інтервальної арифметики в $I(R_M)$ [3]. Інтервал $\downarrow A$ дістають найбільш вузьким, якщо праві додатні та ліві від'ємні границі округляти з надлишком за модулем, а ліві додатні та праві від'ємні - з недостаткою.

Для поправки границі результуючого інтервалу використовується програма

CORR(x),

де x - задане число, яке визначає границю інтервалу. Ця програма зсуває x до наступного машинного числа, тобто вона додає одиницю до молодшого розряду числа. Програма **CORR** буде досить часто використовуватися в інших програмах, тому доцільно записати її на мові Асемблер. Всі наведені нижче програми написані на мові **FORTRAN-IV** і оформлені у вигляді підпрограм типу **SUBROUTINE**.

Для реалізації інтервальних операцій /додавання, множення, віднімання/ використовують програми:

ADD(x1, x2, y1, y2, z1, z2, IADDER),

/1/

SUB(x1, x2, y1, y2, z1, z2, ISUBER),

/2/

MUL(x1, x2, y1, y2, z1, z2, IMULER),

/3/

де $[x_1, x_2]$, $[y_1, y_2]$ - вхідні інтервали операції; $[z_1, z_2]$ - результуючий інтервал операції; *IADDER*, *ISUBER*, *IMULER* - показники правильності задання вхідних інтервалів. Показник дорівнює нулю, якщо $x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2$, і одиниці - в протилежному випадку. Інтервальне ділення виконує програма:

DIV(x1, x2, y1, y2, z1, z2, z3, z4, IDIVER, ITYPE, IPOKS),

де $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, IDIVER$ набувають описаних вище значень; *ITYPE* - параметр, що дорівнює 1 за умови $0 \notin [y_1, y_2]$, і 2, якщо $y_1 \leq 0 \leq y_2$, *IPOKS* - параметр, від якого залежить величина нескінченості /при *ITYPE* = 2/. При розв'язуванні системи нелінійних рівнянь роль параметра *IPOKS* може відігравати показник степеня системи.

Знаходження інтервальних розширень елементарних математичних функцій здійснюють за програмами

SQR(x1, x2, z1, z2, ISQRER), /4/

SQRT(x1, x2, z1, z2, ISQER), /5/

LN(x1, x2, z1, z2, ILNER), /6/

EXP(x1, x2, z1, z2, IEXPER), /7/

SIN(x1, x2, z1, z2, ISINER), /8/

COS(x1, x2, z1, z2, ICOSER), /9/

ARTG(x1, x2, z1, z2, IARTER), /10/

Математичний запис роботи програм /4/ - /10/ має вигляд

$$[z_1, z_2] = [x_1, x_2]^2 = \begin{cases} [x_1^2, x_2^2], & x_1 \geq 0 \\ [0, (\max(-x_1, x_2))^2], & x_1 \leq 0 \leq x_2 \\ [x_2^2, x_1^2], & x_2 \leq 0; \end{cases}$$

$$[z_1, z_2] = \sqrt{[x_1, x_2]} = [\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}], \quad x_1 \geq 0;$$

$$[z_1, z_2] = \ln([x_1, x_2]) = [\ln(x_1), \ln(x_2)], \quad x_1 > 0;$$

$$[Z1, Z2] = \exp([x1, x2]) = [\exp(x1), \exp(x2)];$$

$$[Z1, Z2] = \sin([x1, x2]) = \begin{cases} [\sin(x1), \sin(x2)], < x1/\pi - \frac{1}{2} > = < x2/\pi - \frac{1}{2} > & , \text{ обое не парні} \\ [\sin(x2), \sin(x1)], < x1/\pi - \frac{1}{2} > = < x2/\pi - \frac{1}{2} > & , \text{ обое парні} \\ [-1, \max(\sin(x1), \sin(x2))], < x1/\pi - \frac{1}{2} > & , \text{ парне} \\ < x2/\pi - \frac{1}{2} > = < x1/\pi - \frac{1}{2} > + 1, \\ [\min(\sin(x1), \sin(x2)), 1], < x1/\pi - \frac{1}{2} > & \text{ не парне} \\ < x2/\pi - \frac{1}{2} > = < x1/\pi - \frac{1}{2} > + 1, \\ [-1, 1], & \text{ в інших випадках,} \end{cases}$$

де $< X >$ - найбільше ціле число менше або дорівнює X ;

$$[Z1, Z2] = \cos([x1, x2]) = \begin{cases} [\cos(x1), \cos(x2)], < x1/\pi > = < x2/\pi > & , \text{ обое не парні} \\ [\cos(x2), \cos(x1)], < x1/\pi > = < x2/\pi > & , \text{ обое парні} \\ [-1, \max(\cos(x1), \cos(x2))], < x1/\pi > & \text{ парне} \\ < x2/\pi > = < x1/\pi > + 1, \\ [\min(\cos(x1), \cos(x2)), 1], < x1/\pi > & \text{ не парне} \\ < x2/\pi > = < x1/\pi > + 1, \\ [-1, 1] & , \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

Тут $< X >$ - найбільше ціле число менше або дорівнює X .

Серед логічних операцій над інтервалами слід відзначити операцію перетину двох інтервалів, яка реалізується програмою

$PERER(x1, x2, y1, y2, z1, z2, IPERER, LOG)$,

/11/

де $[x1, x2]$, $[y1, y2]$ - вхідні інтервали; $[z1, z2]$ - результатуючий інтервал; $IPERER$ - показник правильності задання вхідних інтервалів; LOG - логічна змінна, яка вказує на наявність точок в інтервалі $[z1, z2]$.

Серед допоміжних програм виділимо програму обчислення абсолютного значення інтервалу:

$$ABS(x_1, x_2, z_1, z_2, IABSER).$$

/12/

В /12/ результат-інтервал обчислюється за формулою

$$[z_1, z_2] = ABS([x_1, x_2]) = \begin{cases} [x_1, x_2], & x_1 > 0 \\ [0, \max(-x_1, x_2)], & x_1 \leq 0 \leq x_2 \\ [-x_2, -x_1], & x_2 < 0. \end{cases}$$

Розглянемо певне число правил поділу навпіл n -мірного паралелепіпеда, що надзвичайно важливо при знаходженні допустимої області результату. При поділі X навпіл у напрямку i вважатимемо, що ділимо X у координатному напрямку x_i . Тоді можемо записати у вигляді об'єднання двох половинних областей $X^{(1)}$ і $X^{(2)}$, тобто

$$X^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}), \quad X^{(2)} = (x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}),$$

$$\text{де } x_j^{(1)} = x_j^{(2)} = x_j, \quad \text{для } \forall j \neq i \quad \text{і} \quad x_i = x_i^{(1)} \cup x_i^{(2)} = \\ = [\underline{x}_i, m(x_i)] \cup [m(x_i), \bar{x}_i].$$

Програми, що здійснюють різний вибір половинних інтервалів при поділі навпіл, мають вигляд

$$PODIL \ i \ (N, x_1, x_2, y_1, y_2, N_1, N_2, z_1, z_2, z_3, z_4, j_1, j_2),$$

/13/

де $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ - різні правила поділу; $[x_1, x_2], [y_1, y_2]$ - вхідні інтервали; $[z_1, z_2], [z_3, z_4]$ - інтервальні масиви, де зберігаються відп. згідно ліві та праві половини інтервалів, розмірності N_1 і N_2 ; j_1, j_2 - лічильники, які показують, скільки підінтервалів вибрано з векторів $[z_1, z_2], [z_3, z_4]$.

Реалізовані також програми алгоритмів розв'язання систем нелінійних рівнянь довільної розмірності різними версіями інтервального методу Ньютона, інтервального методу типу Рунге [5] та ін. [1, 6]. Вони знаходять всі дійсні корені, в тому числі і кратні, в будь-якому наперед вказаному інтервалі. Для їхньої роботи необхідно задати вхідні інтервали, точність знаходження результуючого інтервалу і розмірність системи рівнянь. Сама система задається у програмі

$$SYSTEM(N, Y, x_1, x_2, w_1, w_2, F),$$

де N - розмірність системи; Y - вектор середніх точок входних інтервалів $[x_1, x_2]$; $[W_1, W_2]$ - інтервальна матриця перших похідних; F - вектор рівнянь системи.

Для практичного використання описаного вище комплексу програм його бажано мати в бібліотеці об'єктних модулів.

1. Бенгерский П.С., Кардаш А.И., Сеньо П.С. Вычислительные аспекты интервального метода типа Рунге // Применение вычислительной техники и математических методов в научных и экономических исследованиях. Тез. докл. К., 1988. С. 8. 2. Глазун Н.М., Грегуль О.Е., Зайка И.Б. COMIF - компилятор вычисления алгебраических выражений, учитывающий ошибки округления ЕС ЭВМ. К., 1985. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 7268-В. 3. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. Новосибирск, 1986. 5. Сеньо П.С. Построение интервального метода типа Рунге // Распараллеливание обработки информации. Тез. докл. Ч. 4. Львов, 1985. С. 50-51. 6. Сеньо П.С. Интервальный итерационный процесс решения нелинейных систем уравнений // Применение вычислительной техники и математических методов в научных и экономических исследованиях. Тез. докл. К., 1988. С. 64. 7. Юлдашев З.Х. Алгоритмы реализации машинной интервальной арифметики для ЭВМ БЭСМ-6 // Алгоритмы и программы. М., 1976. № 2 /13/. С. 64. 8. Moore R.E. Interval analysis. N.Y.: Prentice-Hall, 1966. 9. Moore R.E. Interval methods for nonlinear systems // Fundamentals of numerical computer (computer-oriented numerical analysis) / Ed. by G. Alefeld, R.D. Grigoreff. Computing Supp. 7. Wien-N.Y. 1980. P. 913-120. 10. Gibb A. Procedures for range arithmetic (algorithm 61) // Comm. ACM. 1961. Vol. 4. P. 319-320. 11. Yohn J.M. Software for interval arithmetic: a reasonably portable package // ACM. Trans. Math. Software. 1979. Vol. 5. P. 50-63.

Стаття надійшла до редколегії 18.09.88

В.М.Зубов, Г.А.Шинкаренко

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ШТРАФУ
ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СТАЦІОНАРНИХ
ЗАДАЧ ГІДРОДИНАМІКИ
ЗІ ЗМІШАНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

В обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ / $n = 2$ або 3 / з ліпшицевою границею Γ розглянемо стаціонарні рівняння Нав'є-Стокса

$$(\bar{u} \cdot \bar{v}) \bar{u} - \mu \Delta \bar{u} + \text{grad } p = \bar{f}, \quad /1/$$

$$\text{div } \bar{u} = 0 \quad /2/$$

зі змішаними крайовими умовами

$$\bar{u} = 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad /3/$$

$$\sum_{j=1}^n \left[-p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \nu_j = \hat{p}_i \text{ на } \Gamma_2, \quad /4/$$

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset, \quad \Gamma_1 \neq \emptyset, \quad \Gamma_2 = \emptyset.$$

Згідно з методом штрафу задача /1/ - /4/ апроксимується ε - задачею

$$(\bar{u}^\varepsilon \cdot \bar{v}) \bar{u}^\varepsilon - \mu \Delta \bar{u}^\varepsilon + \text{grad } p^\varepsilon = \bar{f} \text{ в } \Omega, \quad /5/$$

$$\varepsilon p^\varepsilon + \text{div } \bar{u}^\varepsilon = 0 \text{ в } \Omega, \quad /6/$$

$$\bar{u}^\varepsilon = 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad /7/$$

$$\sum_{j=1}^n \left[-p^\varepsilon \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \right] \nu_j = \hat{p}_i \text{ на } \Gamma_2, \quad /8/$$

де $\varepsilon > 0$ - малий параметр.

Ставиться питання про збіжність послідовності узагальнених розв'язків $(\bar{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$. ε -задач /5/ - /8/ при $\varepsilon \rightarrow 0$ до узагальненого розв'язку $(\bar{u}, p)$ задачі /1/ - /4/. У випадку крайової умови

$$\bar{u} = 0 \text{ на } \Gamma$$

це питання розглянуто в [1, 2].

Узагальнені розв'язки $(\bar{u}, \rho) \in V \times L^2(\Omega)$ та $(\bar{u}^\varepsilon, \rho^\varepsilon) \in V \times L^2(\Omega)$ задач /1/ - /4/ та /5/ - /8/ відповідно задовольняють рівняння

$$a(\bar{u}, \bar{v}) + b(\rho, \bar{v}) + c(\bar{u}, \bar{u}, \bar{v}) = \langle \bar{f}, \bar{v} \rangle \quad \forall \bar{v} \in V, \quad /9/$$

$$b(q, \bar{u}) = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega) \quad /10/$$

та

$$a(\bar{u}^\varepsilon, \bar{v}) + b(\rho^\varepsilon, \bar{v}) + c(\bar{u}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon, \bar{v}) = \langle \bar{f}, \bar{v} \rangle \quad \forall \bar{v} \in V, \quad /11/$$

$$-\varepsilon \cdot (\rho^\varepsilon, q) + b(q, \bar{u}^\varepsilon) = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega). \quad /12/$$

Тут використані наступні позначення

$$V = (U)' , \quad U = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_0} = 0\};$$

$$a(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{\mu}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) d\Omega;$$

$$b(\rho, \bar{v}) = - \int_{\Omega} \rho \operatorname{div} \bar{v} d\Omega;$$

$$c(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i d\Omega.$$

Лема. Існують додатні сталі γ, K такі, що

$$a(\bar{v}, \bar{v}) \geq \gamma \mu |\bar{v}|_{(H^1(\Omega))'}^n \quad \forall \bar{v} \in V,$$

$$|c(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})| \leq K |\bar{u}|_{(H^1(\Omega))'}^n |\bar{v}|_{(H^1(\Omega))'}^n |\bar{w}|_{(H^1(\Omega))'}^n \quad \forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V.$$

Теорема 1. Нехай

$$|\bar{f}|^* = \sup_{\bar{v} \in V} \frac{|\langle \bar{f}, \bar{v} \rangle|}{|\bar{v}|_{(H^1(\Omega))'}^n}.$$

Якщо $4K|\bar{f}|^* < (\gamma\mu)^n$, тоді існують розв'язок $(\bar{u}, \rho)$ задачі /9/, /10/, а також розв'язок $(\bar{u}^\varepsilon, \rho^\varepsilon)$ задачі /11/, /12/, причому

$$|\bar{u}|_{(H^1(\Omega))'}^n \leq C, \quad |\bar{u}^\varepsilon|_{(H^1(\Omega))'}^n \leq C, \quad C = \frac{4|\bar{f}|^*}{\gamma\mu}.$$

Доведення. Нехай $\bar{u} \in V^0 = \{\bar{v} \in V: \operatorname{div} \bar{v} = 0 \text{ в } L^2(\Omega)\}$.
Розглянемо задачу знаходження вектора $\bar{w} \in V^0$ такого, що

$$a(\bar{w}, \bar{v}) + c(\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}) = \langle \bar{f}, \bar{v} \rangle \quad \forall \bar{v} \in V^0 \quad /13/$$

За теоремою Лакса-Мільграма задача має єдиний розв'язок для довільного $\bar{u}$ з кулі

$$B = \{\bar{u} \in V^0: |\bar{u}|_{(H^1(\Omega))^n} < \frac{\gamma\mu}{K}\},$$

оскільки за лемою

$$a(\bar{v}, \bar{v}) + c(\bar{u}, \bar{v}, \bar{v}) \geq \gamma\mu |\bar{v}|_{(H^1(\Omega))^n}^2 - K|\bar{u}|_{(H^1(\Omega))^n} |\bar{v}|_{(H^1(\Omega))^n}^2$$

Таким чином, існує відображення $F: B \rightarrow V^0$, що ставить у відповідність кожному $\bar{u} \in B$ розв'язок $\bar{w} \in V^0$ задачі /13/. Використовуючи принцип Шаудера, можна довести, що F має нерухому точку в кулі

$$B_c = \{\bar{u} \in B: |\bar{u}|_{(H^1(\Omega))^n} \leq c\}.$$

Звідси випливає існування розв'язку задачі /9/, /10/ з необхідною властивістю.

Для доведення існування розв'язку задачі /11/, /12/ розглядається допоміжна задача

$$\bar{u}^\varepsilon \in V, \quad /14/$$

$$a(\bar{u}^\varepsilon, \bar{v}) + \varepsilon'(\operatorname{div} \bar{u}^\varepsilon, \operatorname{div} \bar{v}) + c(\bar{u}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon, \bar{v}) = \langle \bar{f}, \bar{v} \rangle \quad \forall \bar{v} \in V, \quad /15/$$

розв'язок якої /якщо він існує/ задовольняє задачу /11/, /12/. Існування розв'язку задачі /14/, /15/ доводиться аналогічно попередньому з використанням теореми Лакса-Мільграма та принципу Шаудера.

Теорема 2. Нехай $\delta K / \bar{f}^* < (\gamma\mu)^2$, тоді існує послідовність розв'язків $(\bar{u}^\varepsilon, \rho^\varepsilon)$ задач /11/, /12/, що при $\varepsilon \rightarrow 0$ збігається до деякого розв'язку $(\bar{u}, \rho)$ задачі /9/, /10/. При цьому має місце оцінка

$$|\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}|_{(H^1(\Omega))^n} + \|\rho^\varepsilon - \rho\|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon,$$

де $C > 0$ - стала, що залежить тільки від $\mu, \gamma, K, |\bar{f}|^*$ та $\|p\|_{L^2(\Omega)}$.

Доведення. За теоремою 1 існують розв'язок $(\bar{u}, p)$ задачі /9/, /10/, а для довільного $\varepsilon > 0$ - розв'язок $(\bar{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$ задачі /11/, /12/, причому

$$|\bar{u}|_{(H^1(\Omega))^n} \leq \frac{4|\bar{f}|^*}{\gamma\mu}, \quad |\bar{u}^\varepsilon|_{(H^1(\Omega))^n} \leq \frac{4|\bar{f}|^*}{\gamma\mu}. \quad /16/$$

З /9/ та /11/ одержуємо

$$a(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}, \bar{v}) + b(p^\varepsilon - p, \bar{v}) + c(\bar{u}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon, \bar{v}) - c(\bar{u}, \bar{u}, \bar{v}) = 0. \quad /17/$$

Використовуючи нерівність /1/

$$\sup_{\bar{v} \in V} \frac{b(q, \bar{v})}{|\bar{v}|_{(H^1(\Omega))^n}} \geq L \|q\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall q \in L^2(\Omega), L = \text{const} > 0,$$

знаходимо

$$\|p^\varepsilon - p\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 |\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}|_{(H^1(\Omega))^n}, \quad /18/$$

де $C_1 = L^{-1}(2\mu + (\gamma\mu)^{-1}8K|\bar{f}|^*)$.

З тотожності /17/ при $\bar{v} = \bar{u}^\varepsilon - \bar{u}$ випливає

$$\gamma\mu |\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}|_{(H^1(\Omega))^n}^2 \leq \varepsilon \|p\|_{L^2(\Omega)} \|p^\varepsilon - p\|_{L^2(\Omega)} + K \left(|\bar{u}|_{(H^1(\Omega))^n} + |\bar{u}^\varepsilon|_{(H^1(\Omega))^n} \right) |\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}|_{(H^1(\Omega))^n}.$$

З огляду на /16/ та /18/ приходимо до оцінки

$$|\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}|_{(H^1(\Omega))^n} \leq C_2 \varepsilon, \quad \|p^\varepsilon - p\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 C_2 \varepsilon,$$

де

$$C_2 = (\gamma\mu - (\gamma\mu)^{-1}8K|\bar{f}|^*)^{-1} \|p\|_{L^2(\Omega)} C_1.$$

Звідси отримуємо твердження теореми.

1. Соболевский П.Е., Васильев В.В. Об одной ε -аппроксимации уравнений Навье-Стокса // Численные методы в механике сплошной среды. 1978. Т.9. № 5. 2. Bergoulet M., Engelman M. A finite element for the numerical solution of viscous incompressible flows // J. Comput. Physics. 1979. Vol 30. p. 181-201.

Стаття надійшла до редколегії 03.09.88

П.С.Сеньо

НОВИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ
ІНТЕРВАЛЬНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ
СИСТЕМ
НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Відомо багато методів уточнення коренів систем нелінійних рівнянь. Однак ефективних методів розв'язування таких систем небагато. Майже всі вони, крім методів розв'язування систем спеціальних видів, базуються на ідеях інтервального аналізу.

Основна ідея побудови інтервальних ітераційних методів розв'язування системи нелінійних рівнянь

$$f(x) = 0, \quad /1/$$

де $f = (f_1, \dots, f_n)^T$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, проста.
Запишемо $f(x)$ у вигляді

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\xi)(x - \bar{x}). \quad /2/$$

Тут /2/ при $n > 1$ слід розуміти як узагальнення теореми про середнє значення [3]. Нехай X_n - інтервальний вектор, який містить в собі x і $\bar{x}$. Тоді $\xi \in X_n$. Замінивши в /2/ $f'(\xi)$ на $f'(X_n)$, одержимо матричне лінійне рівняння з інтервальними коефіцієнтами

$$f(\bar{x}) + f'(X_n)(z - \bar{x}) = 0. \quad /3/$$

Очевидно, розв'язок рівняння /1/ належить множині Z_n , елементи якої $z \in Z_n$ - є розв'язками рівняння /3/. Тому, якщо $x^* \in X_n$ то $x^* \in Z_n$, де x^* - розв'язок /1/. Далі приймемо $X_{n+1} = X_n \cap Z_n$, ($n=0,1,\dots$).

При $n=1$ описану ідею легко узагальнити для побудови інтервальних ітераційних методів вищих порядків збіжності [1]. Однак при $n > 1$ використання аналога теореми Тейлора у термінах узагальненої теореми про середнє значення вимагає розв'язання матричних

рівнянь вищих степенів з інтервальними коефіцієнтами, апроксимації їх приводять до $x^* \notin Z_n$. Цим пояснюється використання для розв'язування /1/ лише інтервального методу Ньютона.

Розвиваючи ідеї, започатковані в [4,5], пропонуємо для побудови інтервальних ітераційних методів високих порядків збіжності використовувати поведінку "середніх" точок залишкових членів у "формі Лагранжа" узагальнених рядів Тейлора [3] функції $f(x)$ та співвідношення між цими точками при розкладі в ряди Тейлора функції $f(x)$ і її похідних.

Нехай відображення $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ має m -ту похідну Гато в кожній точці випуклої множини $D_0 \subset D$ і $x_1, x_2 \in D_0$. Тоді

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) + \dots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_1 + \theta_m^0(x_2 - x_1))(x_2 - x_1)^m \quad /4/$$

Теорема 1. Якщо існує $(m+1)$, похідна Гато в кожній точці випуклої множини $D_0 \subset D$ і жодна "координата" гіперматриці $f^{(m+1)}(x_2)$ не дорівнює нулю, то

$$\theta_m^0 \xrightarrow{x_1 \rightarrow x_2} \frac{1}{m+1} \quad /5/$$

по кожній координаті "вектора" θ_m^0 .

Доведення. В умовах теореми, крім /4/, має місце ще й рівність

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) + \dots + \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x_1 + \theta_{m+1}^0(x_2 - x_1))(x_2 - x_1)^{m+1} \quad /6/$$

Застосуємо в /4/ до функції $f^{(m)}(x)$ узагальнену теорему про середнє значення. Тоді

$$f^{(m)}(x_1 + \theta_m^0(x_2 - x_1)) = f^{(m)}(x_1) + f^{(m+1)}(x_1 + \theta_m^0(x_2 - x_1)) \cdot \theta_m^0(x_2 - x_1), \quad /7/$$

де компоненти гіперматриці $f^{(m+1)}(x_1 + \theta_m^0(x_2 - x_1))$ одержуємо послідовним застосуванням теореми про середнє значення окремо до кожної компоненти гіперматриці $f^{(m)}(x)$. У поняття гіперматриці вкладаємо наступний зміст. При $m=1$

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(x_1 + \theta_1^0(x_2 - x_1))(x_2 - x_1),$$

де

$$f'(x_1 + \theta_1^0(x_2 - x_1)) = \begin{pmatrix} f'_1(x_1 + \theta_{11}^0(x_2 - x_1)) \\ \vdots \\ f'_n(x_1 + \theta_{1n}^0(x_2 - x_1)) \end{pmatrix} \quad /8/$$

Це матриці Якобі, в якій, взагалі кажучи, всі $\theta_l^0 \in (0;1) (l=1, \dots, n)$ різні. Тому $f'(x_1 + \theta_1^0(x_2 - x_1))$ не похідна Гато, взята в деякій проміжній точці. Зауважимо, що для всіх елементів кожної окремої стрічки θ_{ij}^0 однакові. При $m=2$ $f''(x_1 + \theta_2^0(x_2 - x_1))$ - вектор матриць Гессе, де числа $\theta_{ij}^0 \in (0;1) (i,j=1, \dots, n)$ різні. Отже, $f''(x_1 + \theta_2^0(x_2 - x_1))$ не є другою похідною Гато, взятою в деякій проміжній точці. При $m=3$ $f'''(x_1 + \theta_3^0(x_2 - x_1))$ - це відповідний вектор, "координати" якого є векторами матриць, тобто він "матриця матриць" і т.д.

Підставляючи /7/ в /4/ і прирівнюючи розклад $f(x_2)$ з розкладом /6/, одержуємо

$$\frac{1}{m+1} f^{(m+1)}(x_1 + \theta_{m+1}^0(x_2 - x_1)) = \theta_m^0 f^{(m+1)}(x_1 + \theta_1^0 \theta_m^0(x_2 - x_1)). \quad /9/$$

З існування $f^{(m+1)}$ -ї похідної Гато у кожній точці випуклої множини $D_0 \subset D$ випливає неперервність всіх функцій, які є елементами гіперматриць $f^{(m+1)}(x_1 + \theta_{m+1}^0(x_2 - x_1)), f^{(m+1)}(x_1 + \theta_1^0 \theta_m^0(x_2 - x_1))$. Переходячи в /9/ до границі при $x_1 \rightarrow x_2$, одержуємо співвідношення /5/. Теорема доведена.

Зауваження 1. Співвідношення /5/ істинне для всіх θ_m^0 , які відповідають ненульовим елементам гіперматриці $f(x_2)$.

Зауваження 2. При виконанні умов теореми 1 послідовне використання аналога теореми про середнє значення дає

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) + \dots + \prod_{i=0}^{m-1} \bar{\theta}_i^{m-i} f^{(m+1)}(x_1 + \prod_{i=0}^m \bar{\theta}_i(x_2 - x_1))(x_2 - x_1)^{m+1}, \quad /10/$$

де $\bar{\theta}_0, \bar{\theta}_1, \dots \in (0;1)$. Однак, якщо жодна "координата" всіх гіперматриць $f^{(i)}(x_2) (i=1, 2, \dots, m+1)$ не дорівнює нулю, то

$$\bar{\theta}_i \xrightarrow{x_1 \rightarrow x_2} \frac{1}{2} \quad (i=1, 2, \dots, m).$$

Комбіноване застосування розкладів /6/, /10/, теореми 1, зауваження 2 дає змогу оцінювати "зверху" та "знизу" інтервальні розширення апроксимуючих виразів.

У табл. 1-4 наведені значення величин θ_1^0 вказаних там функцій при різних значеннях точок x_1, x_2 .

В табл. 5 наведені значення $\theta_2^0, \theta_3^0, \theta_4^0$ функції $y = \ln x$ при різних значеннях точок x_1, x_2 . Результати обчислень /табл. 1-5/ підтверджують положення теореми 1, що $\theta_1^0 \rightarrow \frac{1}{2}$, $\theta_2^0 \rightarrow \frac{1}{3}, \theta_3^0 \rightarrow \frac{1}{4}, \theta_4^0 \rightarrow \frac{1}{5}$ при $x_1 \rightarrow x_2$.

Таблица 1

$$y = \ln x$$

x_1	x_2	θ_1°
.5	1	.442695
.75	1	.4760652
.9	1	.4914121

Таблица 2

$$y = \ln x$$

x_1	x_2	θ_1°
1	5	.3713353
4.0	5	.4814432
4.5	5	.4912680
4.99	5	.497109

Таблица 3

$$y = x^4$$

x_1	x_2	θ_1°
.7	1	.5291096
.8	1	.518442
.9	1	.508766
.993	1	.5004142

Таблица 4

$$y = x^{100}$$

x_1	x_2	θ_1°
.1	1	.9506275
..	1	.9225106
.9	1	.770097
.999	1	.5099

Таблица 5

x_1	x_2	θ_2°	θ_3°	θ_4°
5	1	.2073355	.1402292	.1050953
3	1	.2447826	.1719628	.1318949
2	1	.2764997	.1994903	.1556054
1.5	1	.2997938	.2200558	.1735284
1.4	1	.3055087	.2251572	.178283
1.3	1	.3115613	.230663	.1827493
1.2	1	.318351	.2363695	.192254
1	.5	.2764997	.1994903	.1556054
.8	.5	.2945391	.2153472	.1694846
.6	.5	.3183514	.2363697	.1922541
.58	.5	.3210737	.2431902	.1934442

З допомогою теореми 1 можна побудувати для розв'язування систем нелінійних рівнянь інтервальні ітераційні процеси вищих порядків. Перший такий метод /інтервальний метод типу Рунге/ запропонований у [4]. Використовуючи граничні співвідношення між величинами θ_{m+1} та θ_m' у розкладах функцій $f(x)$ та $f'(x)$ в ряди Тейлора, апроксимацію відрізка ряду Тейлора функції $f(x)$ лінійною комбінацією лінійних операторів за методикою з [2], побудовані наступні інтервальні ітераційні процеси.

Алгоритм 1:

X_0 - довільний початковий інтервал,

$$\bar{K}_{n+1} = m(x_n) - B_n f(m(x_n)) + [I - B_n \cdot f'(x_n)](x_n - m(x_n)),$$

$$Y_n = \bar{K}_{n+1} \cap x_n,$$

$$K_{n+1} = m(Y_n) - C_n f(m(Y_n)) + [I - C_n \cdot f'(Y_n)](Y_n - m(Y_n)),$$

$$x_{n+1} = K_{n+1} \cap x_n \quad (n=0, 1, \dots),$$

де C_n -приблизна інверсія центра матриці $f'(Y_n) = \frac{1}{4} f'(m(Y_n)) + \frac{3}{4} f'(m(Y_n)) + \frac{2}{3} (Y_n - m(Y_n))$; $m(x)$ -середина інтервалу x ; B_n -приблизна інверсія центра матриці $f'(x_n)$; I - одинична матриця.

Алгоритм 2:

X_0 -довільний початковий інтервал,

$$K_{n+1} = m(x_n) - C_n f(m(x_n)) + [I - C_n \cdot f'(x_n)](x_n - m(x_n)),$$

$$x_{n+1} = K_{n+1} \cap x_n \quad (n=0, 1, \dots).$$

Алгоритм 3:

X_0 -довільний початковий інтервал,

$$K_{n+1} = m(x_n) - B_n f(m(x_n)) - B_n f'(x_n)(x_n - m(x_n)),$$

$$x_{n+1} = K_{n+1} \cap x_n \quad (n=0, 1, \dots).$$

При побудові алгоритмів 1-3 використано співвідношення

$$\frac{1}{2} f''(x_1 + \theta_2^0 (x_2 - x_1))(x_2 - x_1)^2 = \int_0^1 f''(x_1 + \theta_1' t) t dt.$$

/43/

При $x^* \in X_n$ маємо $x^* \in X_{n+1}$, де X_{n+1} визначають за формулами будь-якого з алгоритмів 1 - 3.

Наведені вище алгоритми здійснюють знаходження всіх дійсних коренів системи /1/, які належать початковому інтервалу X_0 , в тому числі і кратних, з заданою точністю. Використовуючи алгоритми поділу проміжних інтервалів X_n [8], описані алгоритми спочатку локалізують корені системи /1/ у початковому інтервалі X_0 , а далі обчислюють у виділених підінтервалах вже одиничні корені /1/. Якщо у деякому інтервалі коренів /1/ немає, то в усіх наведених алгоритмах за скінченну кількість кроків перетини $K_{n+1} \cap X_n$ дають пусту множину.

Алгоритми 1-3 не еквівалентні. Наприклад, алгоритм 1 має локальний порядок збіжності не нижчий 5, а алгоритми 2,3 - не нижчий 4. Алгоритм 1 більш трудомісткий порівняно з алгоритмами 2,3. Однак він збігається з вказаним порядком з ширшого початкового інтервалу, що часто дає змогу знайти всі корені в інтервалі X_0 за менший час, ніж за допомогою алгоритмів 2,3. З іншого боку, алгоритм 2 шукає корені системи /1/ в X_0 швидше, ніж алгоритм 3. Однак він більш "чутливий" до розміщення коренів системи /1/ відносно меж інтервалу X_0 .

У табл. 6 наведені результати розв'язування за допомогою інтервального метода Ньютона в інтерпретації Кравчика [7] та алгоритмів 1 - 3 двох систем тестової [6]:

$$\begin{cases} 6x^5 - 25,2x^3 + 24x - 6y = 0, \\ 12y - 6x = 0, \end{cases} \quad /12/$$

та системи

$$\begin{cases} x^4 - 2x^3y + 2xy^3 - y^4 + x^3x^2y - 5xy^2 + 3y^3 - 87x^2 + 4xy + 83y^2 - 265x - 435y + 350 = 0, \\ x^7 + 3x^6y - 2x^5y^2 - 10x^4y^3 + x^3y^4 + 11x^2y^5 - 4y^7 - 4x^6 - 11x^5y + 10x^4y^2 + 30x^3y^3 - 16x^2y^4 - \\ - 19xy^5 + 10y^6 - 35x^5 - 20x^4y + 16x^3y^2 - 58x^2y^3 - xy^4 + 98y^5 + 140x^4 + 30x^3y + \\ + 164x^2y^2 + 102xy^3 - 112y^4 + 259x^3 + 23x^2y - 94xy^2 - 728y^3 - 1036x^2 - \\ - 403xy + 98y^2 - 225x + 1530y + 900 = 0. \end{cases}$$

/13/

Характерна особливість системи /13/ та, що вона має 17 дійсних коренів у квадраті $\{x, y\} = [-10, 10] \times [-10, 10]$, причому корінь $(x, y) = (-2, 3)$ двократний. Всі корені знаходили з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$. Наведені в табл. 6 обчислення виконав П.С.Венгерський.

Таблиця 6

Система	Початковий інтервал	Кількість коренів	Кількість ітерацій за алгоритмом			
			Ньютона:	1	2	3
/12/	$\begin{cases} [-2, 3] \\ [-2, 3] \end{cases}$	5	109	39	51	67
	$\begin{cases} [6, 2.9] \\ [6, 2.9] \end{cases}$	1	42	15	27	-
	$\begin{cases} [3, 10] \\ [3, 10] \end{cases}$	Немає коренів	16	5	-	-
	$\begin{cases} [5, 5.0] \\ [5, 5.0] \end{cases}$	2	113	15	-	-
	$\begin{cases} [-1.5, 4.0] \\ [-3.0, 8.0] \end{cases}$	5	2068	937	1043	1007
	$\begin{cases} [-2.0, 2.0] \\ [5, 2.5] \end{cases}$	1	318	142	151	-
/13/	$\begin{cases} [-8.0, -1.5] \\ [2.0, 2.5] \end{cases}$	1	149	51	79	-

Очевидно, що наведена в табл. 6 кількість не ілюструє ні швидкості збіжності алгоритмів, ні часу, затраченого на знаходження кожного кореня системи /1/ кожним із названих алгоритмів - уточненню кореня завжди передувала локалізація його за неоднакову кількість кроків для різних алгоритмів. Отже, в табл. 6 відображена лише загальна тенденція.

Швидкість збіжності інтервальних ітераційних процесів суттєво залежить від точності знаходження інтервальних оцінок [1] відповідних функцій. Тому детальніше розглянемо можливості підвищення точності цих оцінок. Інший підхід до розв'язання цієї проблеми запропоновано в [9].

Перша можливість впливає з ненааявності в інтервальній арифметиці закону дистрибутивності /має місце лише субдистрибутивність/ та відсутністю в ній єдиного елемента як додавання, так і множення.

Тому перед побудовою інтервального розширення даної функції її потрібно зобразити у вигляді суми найменшої можливої кількості доданків. Це досягається розкладом виразу на множники, зведенням дробів до спільного знаменника, знищенням подібних членів, використанням "формул згортання" виразів. Наприклад, потрібно оцінити функцію $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ на інтервалі $[-3, 2]$. Безпосередньо одержуємо $f([-3, 2]) = [-64, 41]$. Але $f(x) = (x-1)^3$. Однак $[-4, 1]^3 = [-64, 1] \subset [-64, 41]$.

Друга можливість підвищення точності інтервального оцінювання функцій полягає в тому, що всі складові в аналітичному заданні даної функції є функціями одного і того ж аргументу. Таким чином, всі "біжучі" точки інтервалів - інтервальних оцінювань складових функцій цілком залежні між собою. Такі інтервали потрібно розглядати в інтервальних операціях як впорядковані множини точок /порядок задає спільний аргумент/. З кожним значенням аргумента пов'язуємо інтервал, який містить значення відповідної складової функції при такому значенні аргумента. Наприклад, якщо функція $f(x)$ монотонно зростає на деякому інтервалі $[a, b]$, то за нижню межу її значень на цьому інтервалі можна взяти значення, що проходить через точки $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, а за верхню - відрізки доплат, проведених у цих же точках до графіка функції $f(x)$.

1. А л е ф е л ь д І., Х е р ц б е р г е р Ю. Введение в интервальные вычисления. М., 1987. 2. Б а р т і ш М.Я., С е н ь о П.С. Про методи типу Рунге для розв'язування нелінійних операторних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А. № 9. 1972. С.771-775. 3. О р т е г а Дж., Р е й н б о л д т В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М., 1975. 4. С е н і о П.С. Построение интервального метода типа Рунге // Распараллеливание обработки информации. Тез. докл. Львов, 1985. С.50-51. 5. С е н ь о П.С. Интервальный итерационный процесс решения нелинейных систем уравнений // Применение вычислительной техники и математических методов в научных и экономических исследованиях. Тез. докл. К., 1988. С.64-65. 6. Hansen E., Sengupta S. Boundin. Solutions of Systems of Equations Using Interval Analysis // BIT. 1981. 21. 203-211. 7. Krawczyk R. Interwalkiteration-verfahren. Ber. Math. // Statist. Sek. Forschungszent. Graz. 1982. Vol. 185-189. P. 1-49. 8. Moore R.E. Interval Methods for Nonlinear Systems // Computing. 1980. Vol. 2. P. 113-120. 9. Nickel K. Die überschätzung des Wertebereiches einer Funktion in der Intervallrechnung mit Anwendungen auf lineare Gleichungssysteme. 1974. Bd. 18. S. 15-36.

Стаття надійшла до редколегії 05.09.88

З М І С Т

Людкевич Й.В., Скасків Р.Б. Чисельне розв'язування крайової задачі Діріхле для рівняння тепло- провідності методами інтегральних перетворень та інтег- ральних рівнянь у випадку незамкнених осесиметричних по- верхонь.....	3
Коркуна М.Д., Кузик А.М., Чулик І.І. Застосування методу сумарної апроксимації для розв'язуван- ня нелінійної задачі теплопровідності.....	8
Мартиненко Марія Д., Мартинен- ко Михайло Д. Еквівалентна лінеаризація для деяких нелінійних коливних систем.....	II
Мартиненко Марія Д., Мартинен- ко Михайло Д. Метод степеневих рядів для однієї нелінійної задачі.....	16
Щербина Ю.М., Голуб Б.М. Умови збіжно- сті квазіньютонівської модифікації методу лінеаризації....	19
Голуб Б.М. Одна схема побудови квазіньютонівсь- ких алгоритмів для безумовної мінімізації функції.....	22
Жук М.В. Застосування методу Канторовича для задачі Діріхле у випадку області спеціального виду.....	25
Роман Л.Л. Про ефективність застосування мето- дів типу Ньютона-Канторовича для розв'язування неліній- них крайових задач.....	29
Квіт І.Д. Тантіль.....	33
Інатишин О.П., Москв"як Є.В. Оптимі- зація структури ремонту з урахуванням рівня напруження....	36
Квіт І.Д., Москв"як Є.В. Залежний від рі- вня напруження розподіл відмови технічної одиниці.....	38
Гриліцький Д.В. Про контактну термопружно- пластичну задачу для півплощини.....	42
Шинкаренко Г.А. Про одну модифікацію схе- ми Ньюмарка.....	46
Ошико Л.Й. Оптимізація форми конструкції, що складається з оболонок обертання.....	52
Дубовик А.В. Аналіз умов спряження для одного класу комбінованих моделей.....	55

Шахно С.М. Збіжність одного ітераційного методу з послідовною апроксимацією оберненого оператора.....	62
Вагін П.П., Муха І.С., Савула Я.Г. Розв'язування геометрично нелінійних задач статички оболонок Тимошенка методом скінченних елементів.....	67
Венгерський П.С. Комплекс програм реалізації інтервальних ітераційних процесів на ЕС ЕОМ.....	75
Зубов В.М., Шинкаренко Г.А. Застосування методу штрафу для розв'язування стаціонарних задач гідродинаміки зі змішаними крайовими умовами.....	81
Сеньо П.С. Новий підхід до побудови інтервальних методів розв'язування систем нелінійних рівнянь.....	85

Сборник научных трудов

**Министерство высшего и среднего
специального образования СССР**

Вестник Львовского университета

Серия механико-математическая

Издается с 1965 г.

Выпуск 31

**ЗАДАЧИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
И МЕХАНИКИ**

**Издательство при Львовском государственном университете
издательского объединения "Вища школа" /290000 Львов-центр,
ул. Университетская, 1/**

/На украинском языке/

Редактор В.В. В о й т о в и ч

Художній редактор В.Д. Ц е й т і н

Технічний редактор С.Д. Д о в б а

Коректор Р.Р. Г а м а д а

ОИБ № 13753

Підписано до друку 25.04.89. БГ 01790.

Формат 60x84/16. Папір друк. № 3. Офс. друк.

Умовн.друк.арк. 5,58. Умовн.фарб.відб. 5,81.

Обл.-вид. арк. 5,33. Тираж 600 прим. Вид. № 1293.

Зам. 2571. Ціна 1 крб. 10 к. Замовне.

Львівська обласна книжков. друкарня.

290000 Львів, вул. Стефаника, 11.

1 крб. 10 к.



ISSN 0201-758X. 0320-6572.

Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех. мат., 1989, вип. 31, 1—96.

Handwritten signature or mark.