УДК 517.946

С.П.Лавренюк

ПРО СЛАБКУ ЗБІЖНІСТЬ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ"ЯЗКІВ РІВНЯННЯ ТИПУ ПОПЕРЕЧНИХ КОЛИВАНЬ СТЕРЖНЯ

Розглянемо в $Q_T = D \times (0,T)$, де $D \in R^n$ – обмежена область, змішану задачу

$$u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2m} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u) + c(x,t) u_t + b(x,t) u = f(x,t), \quad /1/$$

$$(x,t) \in Q_T, \quad D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad /2/$$

$$\left. \frac{\partial^i u}{\partial n^i} \right|_{S_T} = 0, \quad i = 0, \ldots, 2m-1, \quad /3/$$

де $S_T = \partial D \times (0,T)$; n – зовнішня нормаль до S_T .

Рівняння /1/ містить як частковий випадок відоме рівняння поперечних коливень стержня. Різні задачі для таких рівнянь вже вивчалися [1].

Вважаємо, що коефіцієнти рівняння /1/ $a_{\alpha\beta}, a_{\alpha\beta t}, c, b \in L_\infty(Q_T)$, функція $f \in L_2(Q_T)$, $\varphi \in H^{2m}(D), \psi \in L_2(D)$. Введемо простір $H_0^{2m,1}(Q_T)$ як замикання множини нескінченно диференційованих в $\bar{Q}_T$ функцій, які перетворюються у нуль в околі S_T , відносно норми

$$\|u\|_{H^{2m,1}(Q_T)} = \left(\int_{Q_T} \left(\sum_{|\alpha| \le 2m} |D^\alpha u|^2 + |u_t|^2 \right) dx dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Назвемо узагальненим розв"язком задачі /1/-/3/ таку функцію $u \in H_0^{2m,1}(Q_T)$, яка задовольняє умову $u(x,0) = \varphi(x)$ й інтегральну рівність

$$\int_{Q_T} \left(\sum_{|\alpha|=|\beta|=2m} a_{\alpha\beta} D^\beta u D^\alpha v - u_t v_t + c u_t v + b u v \right) dx dt =$$

$$= \int_{Q_T} f v \, dx\,dt - \int_D \psi(x)\, v(x,0)\, dx$$

для кожної $v(x,t) \in \overset{\circ}{H}{}^{2m,1}(Q_T)$, $v(x,T) = 0$.

Розглянемо поряд з /1/–/3/ задачу

$$u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2m} D^{\alpha}\left(a^{k}_{\alpha\beta}(x,t) D^{\beta} u\right) + c^{k}(x,t) u_t + b^{k}(x,t) u = f^{k}(x,t), \qquad /4/$$

$$u(x,0) = \varphi^{k}(x), \quad u_t(x,0) = \psi^{k}(x), \qquad /5/$$

$$\left.\frac{\partial^{i} u}{\partial n^{i}}\right|_{S_T} = 0, \quad i = 0, \dots, 2m-1. \qquad /6/$$

Нехай $a^{k}_{\alpha\beta}$, $a^{k}_{\alpha\beta t}$, c^{k}, $b^{k} \in L_\infty(Q_T)_k$ й обмежені однією і тією ж сталою, яка не залежить від k, $f^{k} \in L_2(Q_T)$, $\varphi^{k} \in \overset{\circ}{H}{}^{2m}(D)$, $\psi^{k} \in L_2(D)$ і

$$\|f^{k}\|_{L_2(Q_T)} + \|\varphi^{k}\|_{H^{2m}(D)} + \|\psi^{k}\|_{L_2(D)} \le A,$$

A не залежить від k. Крім того, нехай $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$,

$$a^{k}_{\alpha\beta} = a^{k}_{\beta\alpha},$$

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=2m} a_{\alpha\beta}(x,t)\eta_\alpha \eta_\beta \ge a_0 \sum_{|\alpha|=2m} \eta_\alpha^2; \quad \sum_{|\alpha|=|\beta|=2m} a^{k}_{\alpha\beta}(x,t)\eta_\alpha \eta_\beta \ge a_0 \sum_{|\alpha|=2m} \eta_\alpha^2,$$

$a^{k}_{\alpha\beta} \to a_{\alpha\beta}$, $c^{k} \to c$, $b^{k} \to b$ у просторі $L_2(Q_T)$, $f^{k} \to f$ слабко в $L_2(Q_T)$, $\varphi^{k} \to \varphi$ слабко в $H^{2m}(D)$, $\psi^{k} \to \psi$ слабко в $L_2(D)$, коли $k \to \infty$ виконуються всі наведені умови, то справедлива така теорема.

<u>Теорема.</u> Кожна із задач /1/–/3/ і /4/–/6/ має єдиний розв"язок у просторі $\overset{\circ}{H}{}^{2m,1}(Q_T)$, причому $u^{k}(x,t) \to u(x,t)$ слабо у просторі $H^{2m,1}(Q_T)$, коли $k \to \infty$. Тут $u(x,t)$ розв"язок задачі /1/–/3/, $u^{k}(x,t)$ – розв"язок задачі /4/–/6/.

Для доведення теореми передовсім потрібно обгрунтувати існування та єдиність розв"язків /1/–/3/ і /4/–/6/ у просторі $H^{2m,1}_0(Q_T)$. Це можна зробити таким чином. Замість /1/ розглядаємо параболічне за Петровським рівняння

$$u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2m} D^{\alpha}\left(a^{\varepsilon}_{\alpha\beta}(x,t) D^{\beta} u\right) - \varepsilon \Delta u_t + c^{\varepsilon}(x,t) u_t + b^{\varepsilon}(x,t) u = f(x,t), \qquad /1'/$$

де $\varepsilon > 0$, $a^{\varepsilon}_{\alpha\beta}$, c^{ε}, b^{ε} – усереднення коефіцієнтів $a_{\alpha\beta}$, c, b. Тоді з [2] випливає існування єдиного розв"язку задачі /1'/, /2/, /3/ у просторі $H^{4m^2}(Q_T)$. Тепер залишається одержати оцінку функції $u^{\varepsilon}(x,t)$ у просторі $H^{2m,1}(Q_T)$, яка не залежить від ε. Така оцінка може бути одержана шляхом домноження рівняння /7/ на $u^{\varepsilon}_t(x,t)$ й інтегрування по області Q_t. Зокрема справедлива оцінка

$$\|u^{\varepsilon}(x,t)\|_{H^{2m,1}(Q_T)} \leq C\left(\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|\varphi\|_{H^{2m}(D)} + \|\psi\|_{L_2(D)}\right),$$

причому стала C не залежить від ε. Отже, множина $\{u^{\varepsilon}(x,t)\}$ слабко компактна в $H_0^{2m,1}(Q_T)$ і з неї можна виділити слабко збіжну послідовність $u^{\varepsilon_i}(x,t)$ до функції $u(x,t)\in H_0^{2m,1}(Q_T)$. Легко переконатися, що функція $u(x,t)$ і є узагальненим розв"язком задачі /1/-/3/. Аналогічно сказаному вище доводиться існування узагальненого розв"язку задачі /4/-/6/.

Тепер залишається показати, що $u^{k}(x,t) \to u(x,t)$ слабко в $H^{2m,1}(Q_T)$, коли $k \to \infty$. Для цього використаємо слабку компактність множини розв"язків $u^{k}(x,t)$ /4/-/6/. Нехай $W(x,t)\in H_0^{2m,1}(Q_T)$ яка-небудь слабка границя множини $\{u^{k}(x,t)\}$. Тоді легко показати, що $W(x,t)$ є узагальненим розв"язком задачі /1/-/3/. Оскільки /1/-/3/ має єдиний розв"язок, то $u(x,t) = W(x,t)$ і вся послідовність $u^{k}(x,t)$ слабко збігається до $u(x,t)$ у просторі $H^{2m,1}(Q_T)$.

1. Б р и ш Н.И., В а л е ш к е в и ч И.Н. Метод Фурье для дифференциальных уравнений, содержащих вторую производную по времени // Докл. АН СССР. 1962. Т.146. № 6. С.1247-1250. 2. С о л о н н и к о в В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова. 1965. Т.83. С.152-158.

Стаття надійшла до редколегії 17.05.89

УДК 517.956

Г.П.Лопушанська

ПРО ОДНУ НЕЛОКАЛЬНУ ЗАДАЧУ У ПРОСТОРІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Доведемо розв"язальність однієї задачі типу Біцадзе-Самарського [1] у просторі узагальнених функцій.

Нехай Ω - область в R^n, $n \geq 3$, обмежена замкненими $n-1$ - вимірними поверхнями $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_m$, $\bigcup_{i=1}^{m}\Gamma_i = \Gamma$, класу C^∞, причому $\Gamma_2,\ldots,\Gamma_m$ лежать у скінченній області, обмеженій