одержати оцінку функції $u^{\varepsilon}(x,t)$ у просторі $H^{2m,1}(Q_T)$, яка не залежить від ε. Така оцінка може бути одержана шляхом домноження рівняння /7/ на $u_t^{\varepsilon}(x,t)$ й інтегрування по області Q_t. Зокрема справедлива оцінка

$$\|u^{\varepsilon}(x,t)\|_{H^{2m,1}(Q_T)} \leq C\left(\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|\varphi\|_{H^{2m}(D)} + \|\psi\|_{L_2(D)}\right),$$

причому стала C не залежить від ε. Отже, множина $\{u^{\varepsilon}(x,t)\}$ слабко компактна в $H_0^{2m,1}(Q_T)$ і з неї можна виділити слабко збіжну послідовність $u^{\varepsilon_i}(x,t)$ до функції $u(x,t) \in H_0^{2m,1}(Q_T)$. Легко переконатися, що функція $u(x,t)$ і є узагальненим розв"язком задачі /1/–/3/. Аналогічно сказаному вище доводиться існування узагальненого розв"язку задачі /4/–/6/.

Тепер залишається показати, що $u^{k}(x,t) \to u(x,t)$ слабко в $H^{2m,1}(Q_T)$, коли $k \to \infty$. Для цього використаємо слабку компактність множини розв"язків $u^{k}(x,t)$ /4/–/6/. Нехай $W(x,t) \in H_0^{2m,1}(Q_T)$ яка-небудь слабка границя множини $\{u^{k}(x,t)\}$. Тоді легко показати, що $W(x,t)$ є узагальненим розв"язком задачі /1/–/3/. Оскільки /1/–/3/ має єдиний розв"язок, то $u(x,t) = W(x,t)$ і вся послідовність $u^{k}(x,t)$ слабко збігається до $u(x,t)$ у просторі $H^{2m,1}(Q_T)$.

1. Б р и ш Н.И., В а л е ш к е в и ч И.Н. Метод Фурье для дифференциальных уравнений, содержащих вторую производную по времени // Докл. АН СССР. 1962. Т.146. № 6. С.1247-1250. 2. С о л о н н и к о в В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова. 1965. Т.83. С.152-158.

Стаття надійшла до редколегії 17.05.89

УДК 517.956

Г.П.Лопушанська

ПРО ОДНУ НЕЛОКАЛЬНУ ЗАДАЧУ У ПРОСТОРІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Доведемо розв"язальність однієї задачі типу Біцадзе-Самарського [1] у просторі узагальнених функцій.

Нехай Ω – область в R^n, $n \geqslant 3$, обмежена замкненими $n-1$ – вимірними поверхнями $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$, $\bigcup_{i=1}^{m} \Gamma_i = \Gamma$, класу C^{∞}, причому $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ лежать у скінченній області, обмеженій поверхнею Γ_1, а $\gamma_1, \dots \gamma_k$ - $n-1$ - вимірні поверхні класу C^∞, що лежать в Ω. На Γ_i задані нескінченно диференційовані функції a_{ij} / $a_{ij}(x) = a_j(x)$, якщо $x \in \Gamma_i$ / і гомеоморфізми $\hat{\omega}_{ij} : \Gamma_i \to \gamma_j$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,k}$, і $\omega_{ij} : x + \nu_{\Gamma_i}\varepsilon \to \hat{\omega} x + \nu_{\gamma}\varepsilon$, $x \in \Gamma_i$ деяких околів $U(\Gamma_i)$ в околи $\tilde{U}(\gamma_j)$ для $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ /$\omega_{ij}(x) = \omega_j(x)$, якщо $x \in \Gamma_i$. Вважаємо, що $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$, $i \neq j$, ε_0 таке, що також не перетинаються між собою всі $U(\Gamma_i), \tilde{U}(\gamma_j), i = \overline{1,m}, j = \overline{1,k}$

Припустимо, що $D(\Gamma) = C^\infty(\Gamma)$, $D'(\Gamma)$ - простір неперервних лінійних функціоналів на $D(\Gamma)$, (φ, F) - дія узагальненої функції $F \in D'(\Gamma)$ на основну $\varphi \in D(\Gamma)$.

<u>Задача А.</u> Нехай $F \in D'(\Gamma)$, $F = \sum\limits_{i=1}^{m} F_i$, $supp F_i \subset \Gamma_i$. Знайти гармонійну в області Ω функцію $u(x)$, що задовольняє умову

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} [u(x_\varepsilon) + \sum_{j=1}^{k} a_j(x_\varepsilon) u(\omega_j(x_\varepsilon))] \varphi(x_\varepsilon) d\Gamma_\varepsilon = (\varphi, F) \qquad /1/$$

для кожної $\varphi \in D(\Gamma)$. Тут $\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(x)$, $a_j(x_\varepsilon) = a_j(x)$, якщо $x_\varepsilon = x + \nu_\Gamma \varepsilon$, $\Gamma_\varepsilon = \{x_\varepsilon = x + \nu_\Gamma \varepsilon, x \in \Gamma\} \subset \Omega$, $|\nu_\Gamma| = 1$.

Для випадку $F = f(x) \in C(\Gamma)$ задача розглядалась в [4], де доведена її однозначна розв"язальність за умови

$$\sum_{j=1}^{k} |a_j(x)| < 1, \quad \sum_{j=1}^{k} a_j(x) = -1, \quad x \in \Gamma \qquad /2/$$

і розв"язальність із точністю до довільної аддитивної сталої у припущенні, що

$$\sum_{j=1}^{K} |a_j(x)| \le 1, x \in \Gamma, \sum_{j=1}^{K} a_j(x_*) > -1, x_* \text{ - деяка точка } \Gamma. \qquad /3/$$

Нехай $G_i(x,y)$ - функція Гріна задачі Діріхле в області Ω_i, обмеженій поверхнею Γ_i / $\Omega_i \cap \Omega = \Omega$ /, $i = \overline{1,m}$, $K_i(x,y) = \frac{1}{P_n} \frac{\partial G_i(x,y)}{\partial \nu_{\Gamma_i y}}$, $x \in \Omega_i$, $y \in \Gamma_i$, P_n — площа одиничної сфери в R^n,

$$K(x,y) = \begin{cases} 0, & x \in \Gamma_i, \quad y \in \Gamma_i \\ K_i(x,y), & x \in \Omega \cup (\Gamma/\Gamma_i), \quad y \in \Gamma_i. \end{cases}$$

<u>Теорема 1.</u> Нехай $F = \sum\limits_{i=1}^{m} F_i \in D'(\Gamma)$. Функція

$$u(x) = \sum_{i=1}^{m} (K_i(x,y), B_i), \quad x \in \Omega, \qquad /4/$$

де

$$B_i \in D'(\Gamma_i), \ (g_i, B_i) = (\varphi_{g_i}, F_i) \ \ \forall g_i \in D(\Gamma_i), \ supp F_i \subset \Gamma_i,$$

$\varphi(x)$ – розв"язок інтегрального рівняння;
g_i

$$\varphi(y)+\int_\Gamma \varphi(x)\,T(x,y)\,d_x\Gamma=g(y),\ y\in\Gamma_i, \qquad /5/$$

$$g(y)=\begin{cases} g_i(y), & y\in\Gamma_i \\ 0, & y\in\Gamma\setminus\Gamma_i \end{cases},\quad T(x,y)=K(x,y)+\sum_{j=1}^{k} a_j(x)K(\hat{\omega}_j(x),y),\quad x,y\in\Gamma,$$

є єдиним розв"язком задачі А при умові /2/. Якщо $(\varphi_0, F)=0$, де $\varphi_0(x)$ – розв"язок однорідного інтегрального рівняння, що відповідає рівнянню /5/ у випадку /3/, узагальнені функції $B_i\in D'(\Gamma_i)$ визначені рівністю $(g_i, B_i)=(\tilde{\varphi}_{g_i}, F_i)$ для кожної $g_i\in D(\Gamma_i)$, $\tilde{\varphi}_{g_i}$ – розв"язок інтегрального рівняння

$$\varphi(y)+\int_\Gamma \varphi(x)T(x,y)d_x\Gamma=g_i(y)-g_1^0(y)\int_\Gamma g_1(t)\,d\Gamma_1,$$

$g_1^0\in D(\Gamma_1), \int_{\Gamma_1} g_1^0(t)\,d\Gamma_1=0$, то функція /4/ є розв"язком задачі А при умові /3/ і він єдиний з точністю до довільної адитивної сталої.

Теорема доводиться за тією ж схемою, що і відповідні теореми у праці [2].

Позначимо через $\rho(x)$ нескінченно диференційовану функцію в $\overline{\Omega}$, яка має порядок відстані від точки $x\in\Omega$ до Γ біля Γ, а в іншій частині області Ω дорівнює нулеві. Так само, як в [3, 5], можна довести теорему.

<u>Теорема 2.</u> Гармонійна в області Ω функція $u(x)$ тоді і лише тоді є розв"язком задачі А, коли існує натуральне число τ таке, що

$$\int_\Omega \rho^\tau(x)\,|u(x)|\,dx<\infty.$$

<u>Задача Б.</u> Нехай $F\in D'(\Gamma),\ F=\sum_{i=1}^{m} F_i,\ \operatorname{supp} F_i\subset\Gamma_i$, знайти гармонійну в області Ω функцію $u(x)$, що задовольняє умову

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\Big[\frac{\partial u(x_\varepsilon)}{\partial\nu}+\sum_{j=1}^{k} a_j(x_\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial q}(\omega_j(x_\varepsilon))\Big]\varphi(x_\varepsilon)\,d\Gamma_\varepsilon=(\varphi,F)$$

для кожної $\varphi\in D(\Gamma)$. Тут $q=(q_1,\dots,q_n)$, $|q|=1$, $q(x)=\nu_{j_i}(\omega_j(x))$ для $x\in\Gamma_i$.

Аналогічні результати справедливі для задачі Б, а також для нелокальних задач типу А і В для систем диференціальних рівнянь 2-го порядку варіаційного типу [2] з нескінченно диференційованими коефіцієнтами при умовах існування фундаментального розв"язку для них у всьому просторі R^n .

1. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. 1969. Т.185. № 4. С.739-740. 2. Волошина М.С., Гупало Г.С., Лопушанська Г.П. Про узагальнену задачу Діріхле для одного класу сильно еліптичних систем диференціальних рівнянь у випадку багатозв"язної області // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1978. Вип. 13. С.5-8. 3. Гупало Г.С. Про узагальнену задачу Діріхле // Доп. АН УРСР. 1966. № 7. С.843-846. 4. Кишкис К.Ю. Об одной нелокальной задаче для гармонических в многосвязной области функций // Дифференц. уравнения. 1987. Т.23. № 1. С.174-177. 5. Лопушанская Г.П. Об обобщенных граничных значениях решений сильно эллиптических систем второго порядка // Теорет. и прикл. вопросы алгебры и дифференц. уравнений. К., 1976. С.102-103.

Стаття надійшла до редколегії 17.05.89

УДК 517.956

Г.П.Лопушанська, А.А.Новинюк

ПРО РОЗВ"ЯЗКИ У ЗАМКНЕНОМУ ВИГЛЯДІ КЛАСИЧНИХ І НЕКЛАСИЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯННЯ КОЛИВАННЯ СТРУНИ У НАПІВСМУЗІ

Розвиваючи метод [2] розв"язування узагальненої задачі Коші, у [3] показано, як у деяких кутових областях для рівнянь з постійними коефіцієнтами можна розв"язувати нові задачі, що не ставляться у класичній теорії. Метод, який у [3] називають операційним методом в узагальнених функціях, ми застосуємо до дослідження класичних і некласичних крайових задач у циліндричній області.

Нехай $u(t,x)$ - регулярний розв"язок рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \qquad /1/$$

в області $\Omega = \{(t,x):\ t>0,\ 0<x<1\}$, $\tilde{u}(t,x) = \begin{cases} u(t,x), & (t,x)\in\Omega \\ 0, & (t,x)\bar{\in}\,\Omega . \end{cases}$

Тоді $\tilde{u}$ є регулярною узагальненою функцією [2] і задовольняє у просторі $\mathcal{D}'(R^2)$ рівняння

$$\tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} = \tilde{f}(t,x), \qquad /2/$$