диференційованими коефіцієнтами при умовах існування фундаментального розв"язку для них у всьому просторі R^n.

1. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. 1969. Т.185. № 4. С.739-740. 2. Волошина М.С., Гупало Г.С., Лопушанська Г.П. Про узагальнену задачу Діріхле для одного класу сильно еліптичних систем диференціальних рівнянь у випадку багатозв"язної області // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1978. Вип. 13. С.5-8. 3. Гупало Г.С. Про узагальнену задачу Діріхле // Доп. АН УРСР. 1966. № 7. С.843-846. 4. Кишкис К.Ю. Об одной нелокальной задаче для гармонических в многосвязной области функций // Дифференц. уравнения. 1987. Т.23. № 1. С.174-177. 5. Лопушанская Г.П. Об обобщенных граничных значениях решений сильно эллиптических систем второго порядка // Теорет. и прикл. вопросы алгебры и дифференц. уравнений. К., 1976. С.102-103.

Стаття надійшла до редколегії 17.05.89

УДК 517.956

Г.П.Лопушанська, А.А.Новинюк

ПРО РОЗВ"ЯЗКИ У ЗАМКНЕНОМУ ВИГЛЯДІ КЛАСИЧНИХ І НЕКЛАСИЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯННЯ КОЛИВАННЯ СТРУНИ У НАПІВСМУЗІ

Розвиваючи метод [2] розв"язування узагальненої задачі Коші, у [3] показано, як у деяких кутових областях для рівнянь з постійними коефіцієнтами можна розв"язувати нові задачі, що не ставляться у класичній теорії. Метод, який у [3] називають операційним методом в узагальнених функціях, ми застосуємо до дослідження класичних і некласичних крайових задач у циліндричній області.

Нехай $u(t,x)$ - регулярний розв"язок рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \qquad /1/$$

в області $\Omega = \{(t,x): t>0,\ 0<x<1\}$, $\tilde{u}(t,x) = \begin{cases} u(t,x), & (t,x)\in\Omega \\ 0, & (t,x)\bar{\in}\Omega. \end{cases}$

Тоді $\tilde{u}$ є регулярною узагальненою функцією [2] і задовольняє у просторі $\mathcal{D}'(R^2)$ рівняння

$$\tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} = \tilde{f}(t,x), \qquad /2/$$

де $\tilde{f}(t,x) = \theta(x)\theta(1-x)[u_t(0,x)\cdot\delta(t) + u(0,x)\cdot\delta'(t)] +$

$$+\theta(t)[u(t,1)\cdot\delta'(x-1) - u(t,0)\cdot\delta'(x) + u_x(t,1)\cdot\delta(x-1) - u_x(t,0)\cdot\delta(x)];$$

$\theta(t)$ – функція Хевісайда. Як відомо [2], розв"язок рівняння /2/ має вигляд

$$\tilde{u}(t,x) = \varepsilon(t,x) * \tilde{f}(t,x), \qquad /4/$$

де $\varepsilon(t,x)$ – фундаментальний розв"язок, а згідно з [3, 5] він єдиний в області Ω.

Введемо позначення

$$a(x) = u_t(0,x), \quad b(x) = u(0,x),$$
$$c(t) = u(t,1), \quad d(t) = u(t,0), \; g(t) = u_x(t,0), \; e(t) = u_x(t,1) \qquad /5/$$

Обчислюючи згортку /4/, яка буде регулярною функцією [3], і враховуючи, що $\tilde{u} = 0$ поза областю Ω, знаходимо представлення розв"язку рівняння /1/ через функції /5/:

$$2u(t,x) = \begin{cases} \int\limits_{x-t}^{x+t} a\,d\xi + b(x-t) + b(x+t), & (t,x)\in\Omega_1, \\ \int\limits_{x-t}^{1} a\,d\xi + b(x-t) + c(x+t-1) + \int\limits_{0}^{x+t-1} e\,d\xi, & (t,x)\in\Omega_2, \\ \int\limits_{0}^{x+t} a\,d\xi + b(x+t) + d(t-x) - \int\limits_{0}^{t-x} g\,d\xi, & (t,x)\in\Omega_3, \\ \int\limits_{0}^{1} a\,d\xi + c(x+t-1) + \int\limits_{0}^{x+t-1} e\,d\xi - \int\limits_{0}^{t-x} g\,d\xi + d(t-x), & (t,x)\in\Omega_4, \end{cases} \qquad /6/$$

$$\Omega_1 = \{(t,x)\in\Omega:\ x-t \geq 0,\ x+t \leq 1\},\quad \Omega_2 = \{(t,x)\in\Omega: x-t \geq 0,\ x+t \geq 1\},$$
$$\Omega_3 = \{(t,x)\in\Omega: x-t \leq 0,\ x+t \leq 1\},\quad \Omega_4 = \{(t,x)\in\Omega: x-t \leq 0,\ x+t \geq 1\}$$

і співвідношення між функціями /5/

$$\int\limits_{\eta}^{1} a\,d\xi + b(\eta) - c(1-\eta) + \int\limits_{0}^{1-\eta} e\,d\xi = 0, \quad \eta\in(0;1); \qquad /7\ a/$$

$$\int\limits_{0}^{1} a\,d\xi - c(1+\eta) + \int\limits_{0}^{1+\eta} e\,d\xi - \int\limits_{0}^{\eta} g\,d\xi + d(\eta) = 0,\ \eta > 0; \qquad /7\ б/$$

$$\int_0^{\eta} a\,d\xi + b(\eta) - \int_0^{\eta} g\,d\xi - d(\eta) = 0, \quad \eta \in (0;1); \qquad /7\text{ в}/$$

$$\int_0^{1} a\,d\xi + c(\eta) + \int_0^{\eta} e\,d\xi - \int_0^{\eta+1} g\,d\xi - d(\eta+1) = 0, \; \eta > 0 \qquad /7\text{ г}/$$

Якщо з /7 в/ знайти $b(\eta)$, а з /7 г/ $\int_0^{\eta} e\,d\xi$ і підставити в /7 б/, то отримаємо

$$d(\eta) + d(\eta+2) - 2c(\eta+1) - \int_0^{\eta} g\,d\xi + \int_0^{\eta+2} g\,d\xi = 0, \; \eta > 0, \qquad /8/$$

звідки видно, що три функції c, d, g не є незалежні.

Тепер зі сукупності шести функцій /5/, що задовольняють /7/, виділяємо різні варіанти крайових умов, у кожному з яких існує єдиний розв"язок $u(t,x) \in C^2(\Omega)$. Отримуємо змішані задачі $\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,g\}$, $\{a,b,d,e\}$, $\{a,b,g,e\}$, некласичні задачі $\{a,c,e\}$, $\{b,c,e\}$, $\{a,d,g\}$, $\{b,d,g\}$, задачі без початкових умов $\{c,e,D$ на $(0;1)\}$, $\{C,D\}$, $\{C,d\}$, $\{C,g\}$, де $C(\eta) = \int_0^{\eta} e\,d\xi - c(\eta)$, $D(\eta) = d(\eta) + \int_0^{\eta} g\,d\xi$, та інші задачі, в яких задано комбінації функцій із сукупності /5/, у тому числі, наприклад, змішану задачу з нелокальними граничними умовами, одному методу розв"язування якої присвячена праця [1].

Під час розв"язування змішаних задач операційним методом в узагальнених функціях виявляється їх зв"язок із одним типом функціональних рівнянь. Розглянемо для прикладу першу змішану задачу $\{a, b, c, d\}$. Щоб записати її розв"язок, потрібно знайти функції g і e. Із /6/ бачимо, що досить знати $G(\eta) = \int_0^{\eta} g\,d\eta$ і $E(\eta) = \int_0^{\eta} e\,d\eta$. З допомогою /7 а/ і /7 в/ знаходимо g і e на інтервалі /0; 1/, використовуючи /7 б/ і /7 г/, отримуємо функціональні рівняння

$$E(\eta+1) - E(\eta-1) = c(\eta+1) + c(\eta-1) - 2d(\eta) \stackrel{df}{=} A(\eta), \; \eta > 1;$$

$$G(\eta+1) \; G(\eta-1) = 2c(\eta+1) - d(\eta) - d(\eta+2), \; \eta > 1.$$

Запишемо перше з цих рівнянь у матричному вигляді [4]

$$\bar{v}(\eta) = K\bar{v}(\eta-1) + \bar{A}(\eta), \; \eta > 1, \qquad /9/$$

де

$$\bar{v}(\eta) = \begin{pmatrix} E(\eta+1) \\ E(\eta) \end{pmatrix}, \; K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \bar{A}(\eta) = \begin{pmatrix} A(\eta) \\ 0 \end{pmatrix},$$

і знайдемо його розв"язок $\bar{v}(\eta)=K^m\bar{v}(\eta-m)+\sum_{i=0}^{m-1}K^i\bar{A}(\eta-i)$, $\eta\in(m+1;\ m+2)$. Так само шукаємо $G(\eta)$. Область Ω_4 характеристиками поділена на області $\Omega_4^{3p}=\{(t,x)\in\Omega_4: t-x\le p,\ t+x\ge p+1\}$, $\Omega_4^{3p-1}=\{(t,x)\in\Omega_4: t-x\ge p,\ t+x\le p+1\}$, $\Omega_4^{3p+1}=\{(t,x)\in\Omega_4: p\le t-x)\le p+1;\ p+1\le t+x\le p+2\}$, $p=1,2\ldots$ Із /6/ випливає необхідність знати $E(t+x-1)$ і $G(t-x)$. Щоб записати, наприклад, значення розв"язку u задачі у точці $(t,x)\in\Omega_4^{3p}$, де $t+x-1\ge p$, знаходимо $E(\eta+1),\ \eta\in(p-1;\ p)$ для $\eta=x+t-2$ як першу компоненту векторного розв"язку $\bar{v}(\eta)$ при $m=p-2$. Подібно шукаємо значення $G(t-x)$.

Якщо $b\in C(0;1)$, $a\in C^1(0;1)$, $c, d\in(C^2\cap L^1)(0,\infty)$ і задовольняють $a(0)=c'(0)=d'(0)=a(1)$, $b(0)=d(0)$, $b(1)=c(0)$, $b''(0)=d''(0)$, $b''(1)=c''(0)$ /умови узгодження/, то отриманий таким чином розв"язок двічі неперервно диференційований і на характеристиках, а отже, класичний.

Отже, метод дає змогу записати розв"язок класичної мішаної задачі у замкненому вигляді і при слабших припущеннях, ніж у вигляді ряду Фур"є.

Простіше розв"язуються деякі некласичні задачі. Для прикладу розглянемо задачу $\{a, d, g\}$, тобто

$$u_t(0,x)=a(x),\ u(t,0)=d(t),\ u_x(t,0)=g(t). \qquad /10/$$

Із /7 в/ знаходимо $b(\eta)$, а з /7 г/ $c(\eta)+\int_0^\eta e\,d\eta=\int_0^{\eta+1}g\,d\eta+d(\eta+1)-\int_0^1 a\,d\eta$ дістаємо розв"язок задачі

$$2u(t,x)=\begin{cases}\int_0^{x-t}g\,d\eta+\int_0^{x+t}g\,d\eta-2\int_0^{x-t}a\,d\eta+d(x-t)+d(x+t),\ (t,x)\in\Omega_1\cup\Omega_2\\ \int_{t-x}^{t+x}g\,d\eta+d(t-x)+d(t+x),\ (t,x)\in\Omega_3\cup\Omega_4.\end{cases} \qquad /11/$$

Якщо $a\in C^1(0;1)$, $d\in(C^2\cap L^1)(0;\infty)$, $g\in(C^1\cap L^1)(0;\infty)$, $a(0)=d'(0)$, $a'(0)=g'(0)$, то він із класу $C^2(\Omega)_t$. Із /11/ видно, що досить знати $a(x), d(t)+\int_0^t g\,dt$, $d(t)-\int_0^t g\,dt$, тобто замість /10/ можна розглядати задачу

$$u_t(0,x)=a(x),\ u(t,0)-\int_0^t u_x(t,0)dt=d_1(t),\ u(t,0)+\int_0^t u_x(t,0)dt=d_2(t) \qquad /12/$$

або

$$u_t(0,x)=a(x),\ u_t(t,0)-u_x(t,0)=g_1(t),\ u_t(t,0)+u_x(t,0)=g_2(t). \quad /13/$$

Згідно з /11/, розв"язок /12/ має вигляд

$$2u(t,x)=\begin{cases} d_2(x-t)+d_2(x+t)-2\int\limits_0^{x-t} a\,d\eta, & (t,x)\in\Omega_1\cup\Omega_2 \\ d_1(t-x)+d_2(t+x), & (t,x)\in\Omega_3\cup\Omega_4, \end{cases}$$

і належить $C^2(\Omega)$, якщо $d_1'(0)+d_2'(0)=a(0),\ d_1''(0)+d_2''(0)=a'(0)$,
а розв"язок /13/

$$2u(t,x)=\begin{cases} \int\limits_0^{x-t} g_2\,d\xi+\int\limits_0^{x+t} g_2\,d\xi+C_1-2\int\limits_0^{x-t} a\,d\eta, & (t,x)\in\Omega_1\cup\Omega_2 \\ \int\limits_0^{t-x} g_1\,d\xi+\int\limits_0^{t+x} g_2\,d\xi+C_1, & (t,x)\in\Omega_3\cup\Omega_4, \end{cases}$$

де C_1 – довільна константа; $g_1(0)+g_2(0)=a(0);\ g_1'(0)+g_2'(0)=a'(0)$.

Розв"язок задачі $\{C,D\}$ $2u(t,x)=D(x+t)-C(1-x+t)+C_1$ також залежить від довільної сталої $C_1=-\int\limits_0^1 a\,d\eta$. Аналогічно до попереднього, можна розглянути задачу $u_t(t,0)+u_x(t,0)=D_1(t)$, $u_x(t,1)-u_t(t,1)=C_1(t)$.

Зауважимо, що зі /7/ випливає залежність між початковими функціями у задачі [1] на інтервалі /0; 1/.

1. В а г а б о в А.И. Одна задача колебания струны // Дифференц. уравнения. 1983. Т.19. № 12. С.2163-2166. 2. В л а д и м и р о в В.С. Уравнения математической физики. М., 1981. 3. М а л а х о в с к а я Р.М. Приложение операционного метода в обобщенных функциях к исследованию краевых задач // Тр. Томского ун-та. Сер. мех.-мат. 1975. Т.220. С.29-39. 4. Х е й л Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984. 5. Х е р м а н д е р Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., 1965.

Стаття надійшла до редколегії 17.05.89