УДК 517.913

В.Г.Костенко, О.М.Маняк, Л.П.Окотруб, О.Р.Патерко

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ"ЯЗКІВ ЗВИЧАЙНОГО ЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Досліджуємо лінійне звичайне диференціальне рівняння

$$x''' + A(t)x' + q(t)x = 0 \qquad /1/$$

на періодичність, обмеженість і стійкість його розв"язків, а також знайдемо зони стійкості розв"язків залежно від параметра μ. При цьому припускаємо $q(t)$ неперервною, $A(t)$ неперервно диференційованою на інтервалі $t_0 \leq t < \infty$ функціями t, крім того,

$$A(t) = z^{-2}(t)\left(\mu^2 - 2z(t)z''(t) + z'^2(t)\right), \qquad /2/$$

де $z(t)$ – довільна достатньо гладка функція; μ – довільний параметр.

Користуючись тим, що рівняння

$$\tilde{x}''' + A(t)\tilde{x}' + \frac{A'(t)}{2}\tilde{x} = 0 \qquad /3/$$

має фундаментальну систему розв"язків виду [1]

$$\tilde{x}_1(t,t_0) = z(t), \quad \tilde{x}_2(t,t_0) = z(t)\cos\mu\varphi(t,t_0),$$
$$\tilde{x}_3(t,t_0) = z(t)\sin\mu\varphi(t,t_0), \qquad /4/$$

де $\varphi(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} z^{-1}(\tau)d\tau$, будь-яку задачу Коші для /1/ методом варіації довільних сталих зводимо до інтегрального рівняння Вольтерра другого роду. Зокрема, при знаходженні нормальної фундаментальної системи розв"язків $x_1(t,t_0)$, $x_2(t,t_0)$, $x_3(t,t_0)$ рівняння /1/ одержуємо такі рівняння Вольтерра:

$$x_1(t,t_0) = z^{-1}(t_0)z(t) + \frac{z''(t_0)z(t)}{\mu^2}(1-\cos\mu\varphi(t,t_0)) + \frac{1}{\mu^3}\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)\left(\frac{A'(\tau)}{2} - q(\tau)\right)x_1(\tau,t_0)d\tau,$$

$$x_2(t,t_0) = \frac{z(t)}{\mu}\sin\mu\varphi(t,t_0) + \frac{1}{\mu^3}\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)\left(\frac{A'(\tau)}{2} - q(\tau)\right)x_2(\tau,t_0)d\tau,$$

$$x_3(t,t_0) = \frac{z(t_0)z(t)}{\mu^2}(1-\cos\mu\varphi(t,t_0)) + \frac{1}{\mu^3}\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)\left(\frac{A'(\tau)}{2} - q(\tau)\right)x_3(\tau,t_0)d\tau, \qquad /5/$$

де $K(t,\tau) = \mu z(t)z(\tau)(1-\cos\mu\varphi(t,\tau))$.

Задача Коші для рівняння /1/ зводиться до задачі Коші для системи рівнянь

$$\frac{d\bar{X}}{dt}=\Lambda(t)\bar{X},$$

де

$$\bar{X}(t)=\begin{pmatrix} x(t)\\ x'(t)\\ x''(t)\end{pmatrix},\qquad \Lambda(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -q(t) & -A(t) & 0\end{pmatrix}. \qquad /6/$$

Нехай додатково коефіцієнти в /1/ періодичні з періодом ω. Розглянемо характеристичне рівняння матриці монодромії

$$\det\left[X(t_0+\omega,t_0)-\rho E\right]=0, \qquad /7/$$

де

$$X(t_0+\omega,t_0)=\begin{pmatrix} x_1(t_0+\omega,t_0) & x_2(t_0+\omega,t_0) & x_3(t_0+\omega,t_0)\\ x_1'(t_0+\omega,t_0) & x_2'(t_0+\omega,t_0) & x_3'(t_0+\omega,t_0)\\ x_1''(t_0+\omega,t_0) & x_2''(t_0+\omega,t_0) & x_3''(t_0+\omega,t_0)\end{pmatrix},$$

E – одинична матриця. Із формули Якобі [2]

$$\det X(t_0+\omega,t_0)=\det X(t_0,t_0)\,e^{\int_{t_0}^{\omega} Sp\,\Lambda(t)dt},$$

де $Sp\,\Lambda(t)$ – слід матриці $\Lambda(t)$, одержуємо з врахуванням /6/ $\det X(t_0+\omega,t_0)=\det X(t_0,t_0)=1$. Тепер /7/ набере вигляду

$$\rho^3-3C\rho^2+3B\rho-1=0.$$

Тут $\quad 3C=x_1(t_0+\omega,t_0)+x_2'(t_0+\omega,t_0)+x_3''(t_0+\omega,t_0),$

$$3B=\begin{vmatrix} x_1(t_0+\omega,t_0) & x_2(t_0+\omega,t_0)\\ x_1'(t_0+\omega,t_0) & x_2'(t_0+\omega,t_0)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2'(t_0+\omega,t_0) & x_3'(t_0+\omega,t_0)\\ x_2''(t_0+\omega,t_0) & x_3''(t_0+\omega,t_0)\end{vmatrix}+ \qquad /8/$$

$$+\begin{vmatrix} x_1(t_0+\omega,t_0) & x_3(t_0+\omega,t_0)\\ x_1''(t_0+\omega,t_0) & x_3''(t_0+\omega,t_0)\end{vmatrix}.$$

Нехай ρ_1, ρ_2, ρ_3 – корені рівняння /7/ /мультиплікатори матриці монодромії/. Оскільки $\rho_1\rho_2\rho_3=1$, то із $|\rho_i|<1$ випливає, що існує ρ_j, для якого $|\rho_j|>1$, і навпаки. У таких випадках [2] усі розв"язки рівняння /1/ нестійкі. Для них неможлива асимптотична стійкість, за якої $|\rho_i|<1$, $i=\overline{1,3}$.

Отже, обмеженість і стійкість розв"язків рівняння /1/ можливі лише тоді, коли $|\rho_1|=|\rho_2|=|\rho_3|=1$. При цьому можливі такі випадки: 1/ $\rho_1=\rho_2=\rho_3=1$; 2/ $\rho_1=$, $\rho_2=\rho_3=-1$; 3/ $\rho_1=1$, $\rho_2=\alpha+i\beta$, $\rho_3=\alpha-i\beta$, $(|\rho_2|=|\rho_3|=1)$. Легко бачити, що перший випадок можливий лише за умови, коли $C = B = 1$, другий, коли $C = B = -\frac{1}{3}$, а третій, коли $-\frac{1}{3} < C = B < 1$. Таким чином, достатня умова обмеженості та стійкості розв"язків рівняння /1/ виражається нерівностями

$$-\frac{1}{3} \leqslant C = B \leqslant 1 . \qquad /9/$$

Крім того, розв"язки рівняння /1/ у першому випадку ω - періодичні, у другому ω - і 2ω - періодичні, у третьому поряд з ω - періодичними існують при $C=B=0$ 3ω - періодичні, а при $C=B=\frac{1}{3}$ - 4ω - періодичні.

Щоб знайти зони стійкості розв"язків рівняння /1/ залежно від μ при $\mu \to \infty$, методом послідовних наближень знаходимо наближені розв"язки рівнянь /5/ з точністю до $O\left(\frac{1}{\mu^6}\right)$:

$$x_1(t,t_0)=\xi(t)\Big\{\xi^{-1}(t_0)-\frac{\xi''(t_0)}{\mu^2}(1-\cos\mu\varphi(t,t_0))+\frac{\xi^{-1}(t_0)}{\mu^2}\int_{t_0}^{t}\xi^2(\tau)\left(\frac{A'(\tau)}{2}-q(\tau)\right)(1-\cos\mu\varphi(t,\tau))d\tau-$$

$$-\frac{\xi''(t_0)}{\mu^4}\int_{t_0}^{t}\xi^2(\tau)\left(\frac{A'(\tau)}{2}-q(\tau)\right)(1-\cos\mu\varphi(t,\tau))(1-\cos\mu\varphi(\tau,t_0))d\tau+$$

$$+\frac{\xi^{-1}(t_0)}{\mu^4}\int_{t_0}^{t}\xi^2(\tau)\left(\frac{A'(\tau)}{2}-q(\tau)\right)(1-\cos\mu\varphi(t,\tau))\int_{t_0}^{\tau}\xi^2(s)\left(\frac{A'(s)}{2}-q(s)\right)(1-\cos\mu\varphi(\tau,s))ds\,d\tau\Big\}+O\left(\frac{1}{\mu^6}\right),$$

$$x_2(t,t_0)=\xi(t)\Big\{\frac{1}{\mu}\sin\mu\varphi(t,t_0)+\frac{1}{\mu^3}\int_{t_0}^{t}\xi^2(\tau)\left(\frac{A'(\tau)}{2}-q(\tau)\right)(1-\cos\mu\varphi(t,\tau))\sin\mu\varphi(\tau,t_0)d\tau+$$

$$+\frac{1}{\mu^5}\int_{t_0}^{t}\xi^2(\tau)\left(\frac{A'(\tau)}{2}-q(\tau)\right)(1-\cos\mu\varphi(t,\tau))\int_{t_0}^{\tau}\xi^2(s)\left(\frac{A'(s)}{2}-q(s)\right)(1-\cos\mu\varphi(\tau,s))\sin\mu\varphi(s,t_0)ds\,d\tau\Big\}+O\left(\frac{1}{\mu^6}\right),$$

$$x_3(t,t_0)=\xi(t)\Big\{\frac{\xi(t_0)}{\mu^2}(1-\cos\mu\varphi(t,t_0))+\frac{\xi(t_0)}{\mu^4}\int_{t_0}^{t}\xi^2(\tau)\left(\frac{A'(\tau)}{2}-q(\tau)\right)(1-\cos\mu\varphi(t,\tau))(1-\cos\mu\varphi(\tau,t_0))d\tau\Big\}+O\left(\frac{1}{\mu^6}\right).$$

Знаходимо наближене і також з точністю до $O\left(\frac{1}{\mu^6}\right)$ зображення для $x_2'(t_0+\omega,t_0)$ та $x_3''(t_0+\omega,t_0)$.
Тоді
$$3C=1+2\cos k\mu-\frac{1-\cos k\mu}{\mu^2}\alpha+$$
$$+\frac{1}{\mu^4}\int_{t_0}^{t}\xi^2(\tau)\left(\frac{A'(\tau)}{2}-q(\tau)\right)\int_{t_0}^{\tau}\xi^2(s)\left(\frac{A'(s)}{2}-q(s)\right)(1-\cos\mu\varphi(\tau,s))[1-\cos(\mu k-\mu\varphi(\tau,s))]ds\,d\tau+O\left(\frac{1}{\mu^6}\right),$$
де $k=\int_{t_0}^{t_0+\omega}\xi^{-2}(\tau)d\tau$, $-\alpha=\int_{t_0}^{t_0+\omega}\xi^2(\tau)\left(\frac{A'(\tau)}{2}-q(\tau)\right)d\tau$.

Спочатку із /9/ розглядаємо

$$3C=3 \qquad /10/$$

при $\mu=\frac{2n\pi+\delta}{k}$, де $-\pi\leqslant\delta\leqslant\pi$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$
Рівняння /10/ після деяких перетворень і спрощень, проведених з точністю до $O\left(\frac{1}{\mu^6}\right)$, зводиться до

$$\delta = \pm \frac{K^2}{(2n\pi)^2}\left\{a_0^2 - a_{2n}^2 - b_{2n}^2 + \frac{a_{4n}^2}{4} + \frac{b_{4n}^2}{4}\right\}^{\frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

де $a_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\alpha$; $a_{2n} = \int_{t_0}^{t_0+\omega} z^2(\tau)\left(\frac{A'(\tau)}{2} - q(\tau)\right)\cos\frac{2n\pi}{K}\varphi(\tau, t_0)\,d\tau$;

$$b_{2n} = \int_{t_0}^{t_0+\omega} z^2(\tau)\left(\frac{A'(\tau)}{2} - q(\tau)\right)\sin\frac{2n\pi}{K}\varphi(\tau, t_0)\,d\tau.$$

Тоді

$$\mu_{2n} = \frac{2n\pi}{K} \pm \frac{K}{(2n\pi)^2}\left\{a_0^2 - a_{2n}^2 - b_{2n}^2 + \frac{a_{4n}^2}{4} + \frac{b_{4n}^2}{4}\right\}^{\frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad /11/$$

Аналогічно знаходимо наближені розв"язки рівняння

$$\mathcal{C} = -1 \qquad /12/$$

при $\mu = \frac{(2n+1)\pi + \delta}{K}$, звідки

$$\mu_{2n+1} = \frac{(2n+1)\pi}{K} \pm \frac{2K}{(2n+1)\pi}\left\{\frac{\alpha}{2K^2} + \frac{1}{2^4(2n+1)^2\pi^2}\left[a_{2(2n+1)}^2 + b_{2(2n+1)}^2 - \alpha^2\right]\right\}^{1/2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad /13/$$

Формули /11/ і /13/ дають змогу попередньо оцінити зони стійкості рівняння /1/ при $\mu \to \infty$. Можливі зони стійкості дають так звані неоднорідні інтервали [2] параметра μ, побудовані з використанням коренів рівнянь /10/ і /12/ відносно μ при $\mu \to \infty$, а саме:

$$\left(\bar{\bar{\mu}}_{2n}, \bar{\mu}_{2n+1}\right) = \left(\frac{2n\pi}{K} + \frac{K}{(2n\pi)^2}\left\{a_0^2 - a_{2n}^2 - b_{2n}^2 + \frac{a_{4n}^2}{4} + \frac{b_{4n}^2}{4}\right\}^{\frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),\right.$$

$$\left.\frac{(2n+1)\pi}{K} - \frac{2K}{(2n+1)\pi}\left\{\frac{\alpha}{2K^2} + \frac{1}{2^4(2n+1)^2\pi^2}\left[a_{2(2n+1)}^2 + b_{2(2n+1)}^2 - \alpha^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right),$$

$$\left(\bar{\bar{\mu}}_{2n+1}, \bar{\mu}_{2n+2}\right) = \left(\frac{(2n+1)\pi}{K} + \frac{2K}{(2n+1)\pi}\left\{\frac{\alpha}{2K^2} + \frac{1}{2^4(2n+1)^2\pi^2}\left[a_{2(2n+1)}^2 + b_{2(2n+1)}^2 - \alpha^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),\right. \qquad /14/$$

$$\left.\frac{2(n+1)\pi}{K} - \frac{K}{2^2(n+1)^2\pi^2}\left\{a_0^2 - a_{2(n+1)}^2 - b_{2(n+1)}^2 + \frac{a_{4(n+1)}^2}{4} + \frac{b_{4(n+1)}^2}{4}\right\}^{\frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right).$$

За умови $\mu \to \infty$ довжина цих інтервалів прямує до $\frac{\pi}{K}$.

Тому що в /9/ $C = B$, то розглядаючи рівняння $\mathcal{B} = 1$ і $\mathcal{B} = -1$ і використовуючи /3/ для $\mathcal{B}$ аналогічно попередньому, переконуємось, що і в цьому випадку можливі зони стійкості для рівняння /1/ з точністю до $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ збігаються з інтервалами /14/.

Таким чином, інтервали /14/ є зонами стійкості розв"язків рівняння /1/ залежно від параметра μ при $\mu \to \infty$.

1. Костенко Е.С. Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка // Дифференц. уравнения, Т.10. № 10. 1974. С. 45-51. 2. Павлюк І.А. Асимптотичні властивості розв"язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. К., 1970.

Стаття надійшла до редколегії 17.05.89

УДК 517.946

В.Г.Костенко

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ НА ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ТЕПЛОВІДДАЧІ

Шукаємо розв"язок рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad /1/$$

в області $\Pi\{0<x<l_1,\ \ 0<y<l_2,\ \ t>0\}$, який би задовольнив початкову

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad 0\le x\le l_1, \ \ 0\le y\le l_2 \qquad /2/$$

та крайову

$$\begin{gathered} u_x(0,y,t)=0, \ \ 0\le y\le l_2, \ t\ge 0, \\ u_y(x,0,t)=0, \ \ 0\le x\le l_1, \ \ t\ge 0, \\ u(l_1,y,t)+\lambda_1(y,t)u_x(l_1,y,t)=\mu_1(y,t), \ 0\le y\le l_2, \ t\ge 0, \\ u(x,l_2,t)+\lambda_2(x,t)u_y(x,l_2,t)=\mu_2(x,t), \ 0\le x\le l_1, \ t\ge 0\ . \end{gathered} \qquad /3/$$

умови. У /3/ належить також визначити $\lambda_1(y,t)$, $\lambda_2(x,t)$ при додатковій умові

$$\begin{gathered} u(0,y,t)=f_1(y,t), \ \ 0\le y\le l_2, \ t\ge 0, \\ u(x,0,t)=f_2(x,t), \ \ 0\le x\le l_1, \ t\ge 0. \end{gathered} \qquad /4/$$

Функції $\mu_1(y,t)$, $\mu_2(x,t)$, $f_1(y,t)$, $f_2(x,t)$ вважаємо заданими і, крім того, $\mu_1(y,0)=\mu_2(x,0)=0$, $f_1(0,t)=f_2(0,t)$.

Замість сформульованої /1/-/4/ розглядаємо допоміжну задачу на визначення розв"язку рівняння /1/, який би задовольняв /2/ і був неперервно диференційованим у замкненій області $\bar{\Pi}$ з умовами на її межі: