1. К о с т е н к о Е.С. Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка // Дифференц. уравнения, Т.10. № 10. 1974. С. 45-51. 2. П а в л ю к І.А. Асимптотичні властивості розв"язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. К., 1970.

Стаття надійшла до редколегії 17.05.89

УДК 517.946

В.Г.Костенко

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ НА ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ТЕПЛОВІДДАЧІ

Шукаємо розв"язок рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad /1/$$

в області $\Pi\{0<x<l_1, \quad 0<y<l_2, \quad t>0\}$, який би задовольнив початкову

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le l_1, \; 0 \le y \le l_2 \qquad /2/$$

та крайову

$$u_x(0,y,t) = 0, \quad 0 \le y \le l_2, \; t \ge 0,$$

$$u_y(x,0,t) = 0, \quad 0 \le x \le l_1, \; t \ge 0, \qquad /3/$$

$$u(l_1,y,t) + \lambda_1(y,t)\,u_x(l_1,y,t) = \mu_1(y,t), \; 0 \le y \le l_2, \; t \ge 0,$$

$$u(x,l_2,t) + \lambda_2(x,t)\,u_y(x,l_2,t) = \mu_2(x,t), \; 0 \le x \le l_1, \; t \ge 0.$$

умови. У /3/ належить також визначити $\lambda_1(y,t)$, $\lambda_2(x,t)$ при додатковій умові

$$u(0,y,t) = f_1(y,t), \quad 0 \le y \le l_2, \; t \ge 0,$$

$$u(x,0,t) = f_2(x,t), \quad 0 \le x \le l_1, \; t \ge 0. \qquad /4/$$

Функції $\mu_1(y,t)$, $\mu_2(x,t)$, $f_1(y,t)$, $f_2(x,t)$ вважаємо заданими і, крім того, $\mu_1(y,0) = \mu_2(x,0) = 0$, $f_1(0,t) = f_2(0,t)$.

Замість сформульованої /1/-/4/ розглядаємо допоміжну задачу на визначення розв"язку рівняння /1/, який би задовольняв /2/ і був неперервно диференційованим у замкненій області $\bar{\Pi}$ з умовами на її межі:

$$u_x(0,y,t)=0, \quad 0\le y\le l_2, \quad t\ge 0,$$
$$u_y(x,0,t)=0, \quad 0\le x\le l_1, \quad t\ge 0,$$
$$u_x(l_1,y,t)=\beta_1(y,t), \quad 0\le y\le l_2, \quad t\ge 0, \qquad /5/$$
$$u_y(x,l_2,t)=\beta_2(x,t), \quad 0\le x\le l_1, \quad t\ge 0.$$

Тут $\beta_1(y,t)$, $\beta_2(x,t)$ вважаємо невідомими, які підлягають визначенню з умови /4/.

Припустимо, що остання задача розв"язана. Тоді стають відомими не лише $u(x,y,t), \beta_1(y,t), \beta_2(x,t)$, а й $u(l_1,y,t)$, $u(x,l_2,t)$, що дає змогу знаходити $\lambda_1(y,t)$ і $\lambda_2(x,t)$ з двох останніх умов /3/.

Розв"язок допоміжної задачі /I/, /2/, /4/, /5/ шукаємо у вигляді

$$u=v(x,y,t)+\frac{x^2}{2l_1}\beta_1(y,t)+\frac{y^2}{2l_2}\beta_2(x,t). \qquad /6/$$

Тоді
$$\frac{\partial v}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)=F(x,y,t), \qquad /7/$$
$$v\big|_{t=0}=0, \qquad /8/$$
$$v_x(0,y,t)=0, \qquad v_y(x,0,t)=0,$$
$$v_x(l_1,y,t)=0, \qquad v_y(x,l_2,t)=0, \qquad /9/$$

де
$$F(x,y,t)=a^2\left[\frac{1}{l_1}\beta_1(y,t)+\frac{1}{l_2}\beta_2(x,t)+\frac{x^2}{2l_1}\frac{\partial^2\beta_1}{\partial y^2}+\frac{y^2}{2l_2}\frac{\partial^2\beta_2}{\partial x^2}\right]-\frac{x^2}{2l_1}\frac{\partial\beta_1}{\partial t}-\frac{y^2}{2l_2}\frac{\partial\beta_2}{\partial t},$$

якщо
$$\beta_{1,y}(0,t)=\beta_{2,x}(0,t)=\beta_{1,y}(l_2,t)=\beta_{2,x}(l_1,t)=0. \qquad /10/$$

Розв"язок задачі /7/–/9/ зображаємо рядом
$$v(x,y,t)=\sum_{m,s=0}^{\infty} T_{ms}(t)\cos\frac{m\pi}{l_1}x\cos\frac{s\pi}{l_2}y, \qquad /11/$$

і враховуємо аналогічне зображення для
$$F(x,y,t)=\sum_{m,s=0}^{\infty} a_{ms}(t)\cos\frac{m\pi}{l_1}x\cos\frac{s\pi}{l_2}y. \qquad /12/$$

де
$$a_{ms}(t)=\frac{4}{l_1l_2}\int_0^{l_1}d\xi\int_0^{l_2}\left\{a^2\left[\frac{1}{l_1}\beta_1(\eta,t)+\frac{1}{l_2}\beta_2(\xi,t)+\frac{\xi^2}{2l_1}\frac{\partial^2\beta_1}{\partial\eta^2}+\frac{\eta^2}{2l_2}\frac{\partial^2\beta_2}{\partial\xi^2}\right]-\frac{\xi^2}{2l_1}\frac{\partial\beta_1(\eta,t)}{\partial t}-\frac{\eta^2}{2l_2}\frac{\partial\beta_2(\xi,t)}{\partial t}\right\}\cos\frac{m\pi}{l_1}\xi\cos\frac{s\pi}{l_2}\eta\,d\eta. \qquad /13/$$

Тоді для $T_{ms}(t)$ маємо задачу

$$T'_{ms}(t)+a^2\lambda^2_{ms}\,T_{ms}(t)=a_{ms}(t), \qquad /14/$$

$$T_{ms}(0)=0, \qquad /15/$$

де $\lambda^2_{ms}=\pi^2\left(\frac{m^2}{\ell_1^2}+\frac{s^2}{\ell_2^2}\right)$, і тому

$$T_{ms}(t)=\int_0^t a_{ms}(\tau)e^{-a^2\lambda^2_{ms}(t-\tau)}d\tau. \qquad /16/$$

Отже, розв"язок задачі /1/, /2/, /5/ має вигляд

$$u(x,y,t)=\sum_{m,s=0}^{\infty}\int_0^t a_{ms}(\tau)e^{-a^2\lambda^2_{ms}(t-\tau)}d\tau\cos\frac{s\pi}{\ell_2}y\cos\frac{m\pi}{\ell_1}x+\frac{x^2}{2\ell_1}\beta_1(y,t)+\frac{y^2}{2\ell_2}\beta_2(x,t) \qquad /17/$$

Тепер умова /4/ дає

$$f_1(y,t)=\int_0^t\sum_{m,s=0}^{\infty}a_{ms}(\tau)e^{-a^2\lambda^2_{ms}(t-\tau)}\cos\frac{s\pi}{\ell_2}y\,d\tau+\frac{y^2}{2\ell_2}\beta_2(0,t), \qquad /18/$$

$$f_2(x,t)=\int_0^t\sum_{m,s=0}^{\infty}a_{ms}(\tau)e^{-a^2\lambda^2_{ms}(t-\tau)}\cos\frac{m\pi}{\ell_1}x\,d\tau+\frac{x^2}{2\ell_1}\beta(0,t) \qquad /19/$$

і тим самим з врахуванням /13/ задача /1/, /2/, /4/, /5/ зводиться до системи двох інтегро-диференціальних рівнянь Вольтерра з невідомими $\beta_1(y,t)$ і $\beta_2(x,t)$.

Інтегруючи частинами в /13/, використовуючи при цьому /10/ і зображаючи рядами

$$x^2=\frac{4\ell_1^2}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}{}'\frac{(-1)^m}{m^2}\cos\frac{m\pi}{\ell_1}x, \quad 0\leqslant x\leqslant\ell_1,$$

$$y^2=\frac{4\ell_2^2}{\pi^2}\sum_{s=0}^{\infty}{}'\frac{(-1)^s}{s^2}\cos\frac{s\pi}{\ell_2}y, \quad 0\leqslant y\leqslant\ell_2,$$

систему /18/, /19/ зводимо до системи двох інтегральних рівнянь Вольтерра першого роду

$$f_1(y,t)=\int_0^t\Big[\int_0^{\ell_2}\mathcal{K}_{11}(y,t;\eta,\tau)\beta_1(\eta,\tau)d\eta+\int_0^{\ell_1}\mathcal{K}_{12}(y,t,\xi,\tau)\beta_2(\xi,\tau)d\xi\Big]d\tau, \qquad /20/$$

$$f_2(x,t)=\int_0^t\Big[\int_0^{\ell_2}\mathcal{K}_{21}(x,t;\eta,\tau)\beta_1(\eta,\tau)d\eta+\int_0^{\ell_1}\mathcal{K}_{22}(x,t,\xi,\tau)\beta_2(\xi,\tau)d\xi\Big]d\tau, \qquad /21/$$

де

$$\mathcal{K}_{11}(y,t,\eta,\tau)=\frac{4a^2}{\ell_1\ell_2}\sum_{m,s=0}^{\infty}{}'(-1)^m e^{-a^2\lambda^2_{ms}(t-\tau)}\cos\frac{s\pi}{\ell_2}\eta\cos\frac{s\pi}{\ell_2}y,$$

$$\mathcal{K}_{12}(y,t;\xi,\tau)=\frac{4a^2}{\ell_1\ell_2}\sum_{m,s=0}^{\infty}(-1)^s e^{-a^2\lambda^2_{ms}(t-\tau)}\cos\frac{m\pi}{\ell_1}\xi\cos\frac{s\pi}{\ell_2}y,$$

$$\mathcal{K}_{21}(x,t;\eta,\tau)=\frac{4a^2}{\ell_1\ell_2}\sum_{m,s=0}^{\infty}(-1)^m e^{-a^2\lambda^2_{ms}(t-\tau)}\cos\frac{s\pi}{\ell_2}\eta\cos\frac{m\pi}{\ell_1}x, \qquad /22/$$

$$\mathcal{K}_{22}(x,t;\xi,\tau)=\frac{4a^2}{\ell_1\ell_2}\sum_{m,s=0}^{\infty}(-1)^s e^{-a^2\lambda^2_{ms}(t-\tau)}\cos\frac{m\pi}{\ell_1}\xi\cos\frac{m\pi}{\ell_1}x$$

У просторі змінних $x,\ y,\ t$ розглядаємо поверхню S_t, точки якої визначаються двома системами нерівностей: $x=0,\ 0\le y\le\ell_2,\ t\ge 0$ і $y=0,\ 0\le x\le\ell_1,\ t\ge 0$. Інколи аналогічні поверхні називають часоподібними. У нашому випадку S_t часоподібний двогранний кут. Якщо на S_t ввести

$$f(x,y,t)=\begin{cases} f_1(y,t), & x=0,\quad 0\le y\le\ell_2,\ t\ge 0\\ f_2(x,t), & y=0,\quad 0\le x\le\ell_1,\ t\ge 0,\end{cases}$$

$$\beta(x,y,t)=\begin{cases} \beta_1(y,t), & x=0,\quad 0\le y\le\ell_2,\ t\ge 0\\ \beta_2(x,t), & y=0,\quad 0\le x\le\ell_1,\ t\ge 0,\end{cases}$$

$$\mathcal{K}(x,y,t;\xi,\eta,\tau)=\begin{cases} \mathcal{K}_{11}(y,t;\eta,\tau), & x=\xi=0,\quad 0\le y,\eta\le\ell_2,\ 0\le\tau\le t\\ \mathcal{K}_{12}(y,t;\xi,\tau), & x=\eta=0,\quad 0\le y\le\ell_2,\ 0\le\xi\le\ell_1,\ 0\le\tau\le t\\ \mathcal{K}_{21}(x,t;\eta,\tau), & y=\xi=0,\quad 0\le x\le\ell_1,\ 0\le\eta\le\ell_2,\ 0\le\tau\le t\\ \mathcal{K}_{22}(x,t;\xi,\tau), & y=\eta=0,\quad 0\le x,\xi\le\ell_1,\ 0\le\tau\le t,\end{cases}$$

то система /20/, /21/ стає інтегральним рівнянням з невідомою функцією $\beta(x,y,t)$ на S_t, тобто

$$f(x,y,t)=\iint_{S_t}\mathcal{K}(x,y,t;\xi,\eta,\tau)\,\beta(\xi,\eta,\tau)\,dS_\tau. \qquad /23/$$

Відомо [1], що класичний розв"язок задачі /1/-/3/ існує, якщо $\lambda_1(y,t),\lambda_2(x,t),\mu_1(y,t),\mu_2(x,t)\in H^{2,1}(S_t)$, $\lambda_1(y,t),\lambda_2(x,t)\ge\lambda_0>0$ і початкові та крайові умови узгоджені до першого порядку.

Єдиність розв"язку рівняння /23/ є наслідком єдиності розв"язку змішаної задачі /1/, /2/, /5/ та єдиності розв"язку задачі Коші /3/ для /1/ з початковими умовами на S_t /умова /4/ та перші дві умови /3//.

Інтегральний оператор

$$A_h\beta = \iint\limits_{S_{t-h}} \mathcal{K}(x,y,t;\xi,\eta,\tau)\beta(\xi,\eta,\tau)dS_\tau = f(x,y,t)$$

при довільному $h>0$ неперервний, оскільки елементи його ядра зображаються рівномірно збіжними рядами в області $0\le x,\xi\le \ell_1$, $0\le y,\eta\le \ell_2$, $0\le\tau\le t-h$ в припущенні $\beta(x,y,t)\in H^{2}(S_t)$.

Якщо існує $\lim\limits_{h\to 0} A_h\beta = A_\beta$, то довизначивши за неперервністю A_h при $h=0$, прийнявши

$$\iint\limits_{S_t} \mathcal{K}(x,y,t;\xi,\eta,\tau)\beta(\xi,\eta,\tau)dS_\tau = A_\beta,$$

оператор стає неперервним, включаючи і $h=0$. Існування $\lim\limits_{h\to 0} A_h\beta$ з врахуванням /10/, /20/ – /22/ є наслідком того, що

$$\beta_{1,s}(\tau)=\frac{2}{\ell_2}\int_0^{\ell_2}\beta_1(\eta,\tau)\cos\frac{s\pi}{\ell_2}\eta\, d\eta = O\left(\frac{1}{s^2}\right),$$

$$\beta_{2,s}(\tau)=\frac{2}{\ell_1}\int_0^{\ell_1}\beta_2(\xi,\tau)\cos\frac{m\pi}{\ell_1}\xi\, d\xi = O\left(\frac{1}{m^2}\right),$$

$$\lim_{\tau\to t}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m e^{-\left(\frac{am\pi}{\ell_1}\right)^2(t-\tau)} = \frac{1}{2}$$

Отже, регулярний за Тихоновим [3] наближений розв"язок рівняння /23/ можна визначити як точну нижню границю деякого згладжуючого функціоналу, наприклад,

$$M_{h,\alpha}(\beta) = \rho^2_{L^2(S_{t-h})}(A_h\beta, f) + \alpha\,\Omega(\beta),$$

де

$$\Omega(\beta) = \iint\limits_{S_{t-h}}\left[q\beta^2 + p_1\left(\frac{\partial\beta}{\partial\xi}\right)^2 + p_2\left(\frac{\partial\beta}{\partial\eta}\right)^2 + p_3\left(\frac{\partial\beta}{\partial\tau}\right)^2\right]dS_\tau;$$

$$q,\ p_1,\ p_2 \ge 0,\quad p_3 \ge p_0 > 0;$$

$$\rho^2_{L^2(S_{t-h})}(A_h\beta, f) = \iint\limits_{S_{t-h}}(A_h\beta - f)^2 dS_t$$

1. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. 2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., 1986.
3. Mizohata S. Unicite du prolongement de solutions pour quelques operateure differentiels paraboliques // Met Coll Sci Univ Kyoto 1958. Ser A1. Vol. 31. p. 219-239.

Стаття надійшла до редколегії 17.05.89

УДК 517.948

М.Й.Михалюк, Є.М.Парасюк

ПРО ЄДИНІСТЬ РОЗВ"ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ДЛЯ ДЕЯКИХ ПОТЕНЦІАЛІВ

Обернена задача логарифмічного потенціалу, як відомо, полягає в тому, щоб відшукати плоску однозв"язну область $\mathcal{D}$, при заповненні якої речовиною зі сталою густиною σ породжується заданий зовнішній потенціал $V_e(x,y)$.

Введемо допоміжну функцію $z = z(t)$, яка відображає конформно круг $|t|<1$ комплексної площини t на область $\mathcal{D}$ площини $z = z(x,y)$, що містить початок координат, причому $z(0)=0,\ z'(0)>0$. Функцію $z(t)$ назвемо розв"язком оберненої задачі для зовнішнього потенціалу $V_e(x,y)$ і густини σ.

Обернена задача логарифмічного потенціалу зводиться до розв"язку нелінійного інтегрального рівняння

$$\sigma z_*(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{u_e(z(\tau))\,d\tau}{\tau - t}, \quad |t|>1, \qquad /1/$$

де

$$u_e(z) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial V_e}{\partial z}, \quad z_*(t) = \overline{z\left(\frac{1}{\bar t}\right)}, \quad |t|<1; \qquad /2/$$

$$z(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k t^k \quad \alpha_1 > 0 \qquad /3/$$