єдиними розв"язками в класі конформних відображень є відповідні функції

$$z(t)=\sqrt{\frac{6}{7}}\,t+\frac{1}{\sqrt{42}}\,t^{6},$$

$$z(t)=\sqrt{\frac{7}{8}}\,t+\frac{1}{\sqrt{56}}\,t^{7}.$$

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89

УДК 519.21

Я.І.Єлейко, О.І.Єлейко

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ГІЛЛЯСТОГО ПРОЦЕСУ З ДОВІЛЬНИМ ЧИСЛОМ ТИПІВ І ПЕРЕТВОРЕННЯМИ, ЗАЛЕЖНИМИ ВІД ВІКУ

Нехай T -деяка абстрактна множина, яку називатимемо множиною типів. На множині T виділена σ -алгебра її підмножин $\mathcal{U}$, яка містить всі одноточкові множини, крім цього, породжується вона зчисленною кількістю своїх елементів. Розглядається популяція, що складається з деякого числа частинок, кожній з яких приписується певний тип, тобто елемент множини T. Закон еволюції популяції полягає в тому, що новонароджена частинка незалежно від наявності інших частинок і передісторії розвитку популяції живе випадковий час $\tau(x)>0$, після чого перетворюється в деяку сукупність новонароджених частинок різних типів.

Нехай $\xi(t,S)$ - число частинок у момент часу t, типи яких належать множині $S\subset\mathcal{U}$. У початковий момент часу допускаємо існування однієї частинки фіксованого типу. Тоді $\xi_\tau(S)$ - число потомків однієї частинки, типи яких належать множині $S\subset\mathcal{U}$. Слід відзначити, що $\xi(t,S)$, $\xi_\tau(S)$ - випадкові міри.

Позначимо

$$A_x(t,S)=M_x\{\xi(t,S)\};$$

$$M(x,du,dy)=M_x\{\xi_\tau\in du/\tau=y\}\,G_x(dy),$$

де M_x - умовне математичне сподівання, за умови, що в початковий момент наявна одна частинка типу x нульового віку; $G_x(dy)=P_x\{\tau\in dy\}$.

Припустимо, що ядро $M(x, du, dy)$ критичне і незвідне [2]. Тоді існує така інваріантна міра $\mu(dx)$ і власна функція $h(x) \geq 0$ μ майже всюди, що

$$\int_T M_x(\xi_\tau(du)) h(u) = h(x),$$

$$\int_T M_x(\xi_\tau(du)) \mu(dx) = \mu(du).$$

Теорема I. Нехай ядро $M(x, du, dy)$ - критичне і незвідне, функція розподілу $G_x(t)$ - нерешітчаста і виконуються умови

$$m = \int_T \mu(dx) \int_0^\infty \int_T M(x, du, dy)\, y\, h(y) < \infty; \qquad /1/$$

$$\int_T \mu(dx) M_x \tau < \infty; \qquad /2/$$

$$\mu\{x \in T : \sup_{t \geq 0} A_x(t, T)\} > 0,$$

тоді

$$\lim_{t \to \infty} A_x(t, s) = \frac{1}{m} h(x) \int_S \mu(dy) \int_0^\infty dt\, (1 - G_y(t))$$

для μ майже всіх $x \in T$.

Доведення. Для $A_x(t, s)$ за формулою повної ймовірності за моментом τ має місце

$$A_x(t, s) = (1 - G_x(t)) \delta_x(s) + \int_0^t \int_T M(x, du, dz) A_u(t - z, s), \qquad /3/$$

де

$$\delta_x(s) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \notin S, \\ 1 & \text{при } x \in S. \end{cases}$$

Розв"язок рівняння /3/ записується у вигляді

$$A_x(t, s) = \int_T \int_0^t \delta_y(s) (1 - G_y(t - u)) R_x(dy, dy), \qquad /4/$$

де

$$R_x(dy, dy) = \sum_{k \geq 0} M^{k*}(x, du, dy),$$

$M^{k*}(x, du, dy)$ - k - кратна згортка ядра $M(x, du, dy)$.
Для знаходження границі /4/ достатньо перевірити виконання умов теореми 2 із [2]. В нашому випадку ці умови можна отримати із /2/. Теорема доведена.

У випадку, коли функція розподілу $G_x(t)$ решітчаста з кроком δ для всіх x, тобто $\sum_n P_x\{\tau = n\delta + \rho(x)\} = 1$, де $\rho(x)$ - функція зсуву, тоді ядро $M(x, dy, dt)$ також решітчасте з функцією зсуву $\rho(x)$ і кроком δ.

Теорема 2. Нехай ядро $M(x, dy, dt)$ решітчасте з кроком $\delta > 0$ і функцією зсуву $\rho(x)$. Якщо виконуються умови теореми 1 і

$$\sum_n \int_T \mu(dx) P_x\{\tau = n\delta + \rho(x)\} < \infty,$$

тоді

$$\lim_{n\to\infty} A_x(n\delta + \rho(x), S) = \frac{1}{m} h(x) \sum_k \int_S \mu(dy) P_y\{\tau = n\delta + \rho(y)\}$$

для μ майже всіх x.

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 1 і спирається на теорему 3 із [2]. Подібний результат для гіллястих процесів Беллмана-Харріса отриманий у статті [1].

1. Е л е й к о Я.И. Асимптотическое поведение первого момента ветвящегося процесса Беллмана-Харриса с произвольным числом типов // Некоторые вопросы теории случайных процессов. К., 1984. С.32-35. 2. Ш у р е н к о в В.М. К теории марковского восстановления // Теория вероятностей и ее применение. 1984. Т.96. № 2. С.248-263.

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89

УДК 517.917

Л.М.Лісевич

ДЕЯКІ ДОСТАТНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ N - МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З S^p - МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

Досліджуємо деякі достатні умови існування N - майже періодичного розв'язку рівняння

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad /1/$$