

$M^{K*}(x, du, dy)$ - K -кратна згортка ядра $M(x, du, dy)$.

Для знаходження границі /4/ достатньо перевірити виконання умов теореми 2 із [2]. В нашому випадку ці умови можна отримати із /2/. Теорема доведена.

У випадку, коли функція розподілу $G_x(t)$ решітчаста з кроком δ для всіх x , тобто $\sum_n P_x\{\tau = n\delta + \rho(x)\} = 1$, де $\rho(x)$ - функція зсуву, тоді ядро $M(x, dy, dt)$ також решітчасте з функцією зсуву $\rho(x)$ і кроком δ .

Теорема 2. Нехай ядро $M(x, dy, dt)$ решітчасте з кроком $\delta > 0$ і функцією зсуву $\rho(x)$. Якщо виконуються умови теореми 1 і

$$\sum_n \int_{\pi} \mu(dx) P_x\{\tau = n\delta + \rho(x)\} < \infty,$$

тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_x(n\delta + \rho(x), S) = \frac{1}{m} h(x) \sum_K \int_S \mu(dy) P_y\{\tau = n\delta + \rho(y)\}$$

для μ майже всіх x .

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 1 і спирається на теорему 3 із [2]. Подібний результат для гіллястих процесів Беллмана-Харріса отриманий у статті [1].

1. Е л е я к о Я.И. Асимптотическое поведение первого момента ветвящегося процесса Беллмана-Харриса с произвольным числом типов // Некоторые вопросы теории случайных процессов. К., 1984. С.32-35. 2. Ш у р е н к о в В.М. К теории марковского восстановления // Теория вероятностей и ее применение. 1994. Т.96. № 2. С.248-263.

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89

УДК 517.917

Л.М.Лісевич

ДЕЯКІ ДОСТАТНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ $\mathcal{N}$ -
МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНОГО
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ
З S^p - МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

Досліджуємо деякі достатні умови існування $\mathcal{N}$ - майже періодичного розв'язку рівняння

$$y'' = f(x, y, y'),$$

/1/

права частина якого є S^p -майже періодичною функцією змінної x , рівномірно відносно y і y' . Аналіз істотно ґрунтується на результатах, отриманих в [1, 2] для рівняння

$$y'' = \varphi(x)y + \psi(x)y' + \omega(x) \quad (2)$$

Одержані результати сформулюємо у вигляді теорем.

Теорема 1. Нехай у рівнянні /2/

1/ $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ неперервні на всій дійсній осі, причому

$$0 < \alpha^2 < \varphi(x) < \beta^2, \quad \sup_{-\infty < x < +\infty} |\psi(x)| < \frac{\beta^2 - \alpha^2}{|\beta|}, \quad \beta^2 < 2\alpha^2;$$

2/ $\omega(x)$ - сумовна функція разом із своїм ρ -м степенем $|\rho| \geq 1$ у кожному скінченному інтервалі, для якого інтеграл

$$\Omega(x) = \int_0^x \omega(t) dt \quad (3)$$

обмежений. Тоді існує розв'язок $y(x)$ рівняння /2/ такий, що

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |y(x)| \leq \frac{2|\beta| \sup_{-\infty < x < +\infty} |\Omega(x)|}{2\alpha^2 - \beta^2} \quad (4)$$

Теорема 2. Нехай у рівнянні /2/

1/ $\varphi(x)$ - неперервна функція на всій дійсній осі;

2/ $\psi(x)$ - неперервно диференційовна функція на всій дійсній осі;

3/ $0 < \alpha^2 < \varphi(x) + \frac{1}{4}\psi^2(x) - \frac{1}{2}\psi'(x) < \beta^2$;

4/ інтеграл /3/, а також інтеграл

$$\Psi(x) = \int_0^x \psi(t) dt$$

обмежені. Тоді існує розв'язок рівняння /2/, для якого

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |y(x)| \leq \frac{2|\beta| \sup_{-\infty < x < +\infty} |\Omega(x)|}{\alpha^2} \quad (5)$$

Теорема 3. Нехай

1/ $f(u, v, w)$ - визначена функція для всіх $u \in J =]-\infty, +\infty[$, $(v, w) \in D$;

2/ $f(u, v, w) S^p$ -майже періодична функція по u , рівномірно відносно $(v, w) \in D$, причому інтеграл

$$\Phi(u, v, w) = \int_0^u f(t, v, w) dt \quad (6)$$

обмежений в області $J \times D$;

3/ існують в області $J \times D$ неперервні частинні похідні $f'_v(u, v, w)$ і $f'_w(u, v, w)$ такі, що

$$0 < \alpha^2 < f''_{uu}(u, v, w) < \beta^2, \sup_{(u, v, w) \in I \times D} |f'_{uw}(u, v, w)| < \frac{\beta^2 - \alpha^2}{|\beta|}, \beta^2 < 2\alpha^2.$$

Тоді, якщо існує обмежений на J розв'язок $y(x)$ рівняння /1/, то він є N -майже періодичним.

Доведення. Нехай $y(x)$ обмежений на J розв'язок рівняння /1/. Прийmemo $\Delta(x, \tau) = y(x+\tau) - y(x)$. Тоді з /1/ отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Delta(x, \tau)}{dx^2} &= f(x+\tau, y(x+\tau), y'(x+\tau)) - f(x, y(x), y'(x)) = \\ &= f_1(x, \tau) \Delta(x, \tau) + f_2(x, \tau) \frac{d\Delta(x, \tau)}{dx} + f(x+\tau, y(x), y'(x)) - f(x, y(x), y'(x)). \end{aligned} \quad /7/$$

Функції $f_1(x, \tau)$, $f_2(x, \tau)$ на основі умови 3/ теореми 3 задовольняють умову 1/ теореми 1, а функція

$$f_3(x, \tau) = f(x+\tau, y(x), y'(x)) - f(x, y(x), y'(x))$$

на основі умови 2/ теореми 3 задовольняє умову 2/ теореми 1.

Отже, за теоремою 1 існує розв'язок рівняння /7/, для якого

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |\Delta(x, \tau)| \leq \frac{2|\beta| \sup_{x \in J} \left| \int_0^\tau f_3(t, \tau) dt \right|}{2\alpha^2 - \beta^2}. \quad /8/$$

За умовою $f(u, v, w) \in S^p$ -майже періодична функція змінної u , рівномірно відносно v, w . Це означає, що для будь-якого дійсного числа $\varepsilon > 0$ кожен інтервал $]\alpha, \alpha+1[$ містить хоча б один S^p -майже період $\tau = \tau(\varepsilon)$, що

$$\sup_{-\infty < u < +\infty} \left(\int_u^{u+\tau} |f(t+\tau, v, w) - f(t, v, w)| dt \right)^{1/p} < \varepsilon. \quad /9/$$

Розглянемо тепер нерівність /8/, а також множину значень $|x| < N$, де $N > 0$ довільне дійсне число. Прийmemo $k = [N] + 1$. Тоді

$$\left| \int_0^x f_3(t, \tau) dt \right| \leq \int_0^x |f_3(t, \tau)| dt = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} |f_3(t, \tau)| dt, \quad /10/$$

де $\xi_0 = 0$, $\xi_{i+1} = \xi_i + 1$. Застосувавши тепер в /10/ нерівність Гельдера, на основі /9/ маємо

$$\left| \int_0^x f_3(t, \tau) dt \right| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \left(\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} |f_3(t, \tau)| dt \right)^{1/p} < k \varepsilon. \quad /11/$$

Далі, беручи до уваги /11/, з /8/ отримуємо

$$|y(x+\tau) - y(x)| < \frac{2\kappa|\beta|}{2\alpha^2 - \beta^2} \varepsilon$$

для всіх $x \in]-\mathcal{N}, \mathcal{N}[$, тобто $y(x) \in \mathcal{N}$ - майже періодичний розв'язок рівняння /1/.

Теорема 4. Нехай

1/ функція $f(u, v, w)$ визначена для всіх $u \in \mathcal{I} =]-\infty, +\infty[$ і всіх $(v, w) \in \mathcal{D}$, а також $\in S^p$ - майже періодична по u , рівномірно відносно $(v, w) \in \mathcal{D}$;

2/ в області $\mathcal{I} \times \mathcal{D}$ існують неперервні частинні похідні $f'_v(u, v, w)$ і $f'_w(u, v, w)$, а також неперервна частинна похідна $f''_{uv}(u, v, w)$, причому

$$0 < \alpha^2 < f'_v(u, v, w) + \frac{1}{4}(f'_w(u, v, w))^2 - \frac{1}{2}f''_{uv}(u, v, w) < \beta^2;$$

3/ інтеграли

$$\int_0^u f'_v(t, v, w) dt, \quad \int_0^u f'_w(t, v, w) dt$$

обмежені в області $\mathcal{I} \times \mathcal{D}$. Тоді, якщо існує обмежений для всіх $x \in \mathcal{I}$ розв'язок $y(x)$ рівняння /1/, то він $\in \mathcal{N}$ - майже періодичним.

Доведення теореми 4 аналогічне доведенню теореми 3, тільки замість нерівності /4/ треба використовувати нерівність /5/ і теорему 2.

1. Л і с е в и ч Л.М. Деякі достатні умови існування обмеженого і майже періодичного розв'язку одного лінійного диференціального рівняння другого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1981. Вип. 18. С.93-97. 2. Л і с е в и ч Л.М. Про одну достатню умову існування обмеженого і майже періодичного розв'язку лінійного диференціального рівняння другого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1985. Вип. 24. С.93-96. 3. Л е в и т а н Б.М. Почти периодические функции. М., 1963.

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89