УДК 536.24.02

Ю.М.Коляно, Б.В.Ковальчук

ВИЗНАЧЕННЯ ТЕПЛОФІЗИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕРМОЧУТЛИВИХ ОРТОТРОПНИХ ТІЛ

Розглянемо термочутливий ортотропний півпростір $z > 0$, який піддається раптовому нагріванню по поверхні $z = 0$ скупченим джерелом тепла потужністю q, тобто

$$\lambda_3(t) \frac{\partial t}{\partial z}\Big|_{z=0} = -q\,\delta(x)\,\delta(y)\,S_+(\tau), \qquad /1/$$

де $\lambda_i(t)$ - коефіцієнти теплопровідності в напрямках x_i $/i = 1, 2, 3/$; $\delta(x)$ - дельта-функція Дірака; $S_+(\tau)$ - асиметрична одинична функція; τ - час.

Для визначення виникаючого при цьому нестаціонарного температурного поля використаємо рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_1(t)\frac{\partial t}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda_2(t)\frac{\partial t}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda_3(t)\frac{\partial t}{\partial z}\right] = C_v(t)\,\dot{t}, \qquad /2/$$

де $C_v(t)$ - коефіцієнт об"ємної теплоємності.

Початкова температура напівпростору допускається сталою, тобто

$$t\Big|_{\tau=0} = t_н \qquad /3/$$

На нескінченості мають місце граничні умови

$$t\Big|_{\substack{|x|\to\infty \\ |y|\to\infty \\ z\to\infty}} = t_н, \quad \frac{\partial t}{\partial x}\Big|_{|x|\to\infty} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial y}\Big|_{|y|\to\infty} = 0 \qquad /4/$$

Для багатьох матеріалів [1 - 3] залежності коефіцієнтів теплопровідності $\lambda_i(t)$ і об"ємної теплоємності $C_v(t)$ від температури мають однаковий характер, тобто

$$a_i = \frac{\lambda_i(t)}{C_v(t)} = const.$$

У цьому випадку крайова задача /1/-/4/ повністю лінеаризується за допомогою змінної Кіргофа

$$\vartheta = \frac{1}{\lambda_3^0} \int_{t_н}^{t} \lambda_3(\zeta)\, d\zeta \qquad /5/$$

і набирає вигляду

$$\lambda_3^0 \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\bigg|_{z=0} = -q\,\delta(x)\delta(y)S_+(\tau), \qquad /6/$$

$$\lambda_1^0 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \lambda_2^0 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \lambda_3^0 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = C_v^0 \dot{\vartheta}, \qquad /7/$$

$$\vartheta\big|_{t=0} = 0, \qquad /8/$$

$$\vartheta\bigg|_{\substack{|x|\to\infty \\ |y|\to\infty}\; z\to\infty} = 0,\quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\bigg|_{|x|\to\infty} = 0,\quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\bigg|_{|y|\to\infty} = 0, \qquad /9/$$

де λ_i^0 - опорні коефіцієнти теплопровідності в напрямках x_i і об"ємної теплоємності.

Застосовуючи інтегральні перетворення Фур"є по x, y і Лапласа по τ, розв"язок крайової задачі /6/-/9/ знаходимо у вигляді

$$\vartheta = \frac{Q}{2\pi}\,\frac{\operatorname{erfc}\frac{1}{2}\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)\frac{C_v}{\tau}}}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \qquad /10/$$

де $\operatorname{erfc}\zeta = 1-\operatorname{erf}\zeta$; $\operatorname{erf}\zeta$ - інтеграл ймовірності;

$$X = \frac{x}{\sqrt{\lambda_1^0}};\quad Y = \frac{y}{\sqrt{\lambda_2^0}};\quad Z = \frac{z}{\sqrt{\lambda_3^0}};\quad Q = \frac{q}{\sqrt{\lambda_1^0\lambda_2^0\lambda_3^0}}$$

При стаціонарному тепловому режимі маємо

$$\vartheta_S = \frac{Q}{2\pi\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \qquad /11/$$

Для нетермочутливого ортотропного тіла $/\lambda_i = \lambda_i^0$, $\theta_j = t_j - t_н$ $/j = 1,2$ // при $z=0$, $y=0$, $x=\frac{d}{2}$ і $z=0$, $x=0$, $y=\frac{d}{2}$ із /11/ відповідно одержуємо

$$\theta_1 = \frac{q}{\pi\sqrt{\lambda_2^0\lambda_3^0}\,d}, \quad \theta_2 = \frac{q}{\pi\sqrt{\lambda_1^0\lambda_3^0}\,d}. \qquad /12/$$

Із /12/ випливає, що

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$$ /13/

Опустивши датчик на глибину $z = b$ при $x = 0,\ y = d$ і вимірявши надлишкову температуру $\theta_3 = t_3 - t_н$, для нетермочутливого ортотропного тіла з /11/ знайдемо

$$\theta_3 = \frac{q}{2\pi\sqrt{b^2\lambda_1^0\lambda_2^0 + d^2\lambda_1^0\lambda_3^0}}$$ /14/

Використовуючи другу формулу в /12/, а також /13/, замість /14/ записуємо

$$\theta_3 = \frac{q\,\theta_2}{2\sqrt{q^2 + (b\pi\lambda\theta_1)^2}}$$ /15/

Для ізотропного нетермочутливого тіла $/\lambda_i = \lambda_i^0 = \lambda_э/$ із /11/ випливає

$$\theta_S = t_S - t_н = \frac{q}{2\pi\lambda_э\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$ /16/

При $x = 0,\ y = \frac{d}{2},\ z = 0$ з /16/ одержуємо

$$q = \pi\theta_э\lambda_э d.$$ /17/

Отже,

$$\theta_3 = \frac{\theta_э\lambda_э\theta_2}{2\sqrt{(\theta_э\lambda_э)^2 + (\varepsilon\theta_1\lambda_2^0)^2}},$$ /18/

де $\varepsilon = \frac{b}{d}$

Із /18/ випливає, що λ_2^0 визначається за формулою

$$\lambda_2^0 = \sqrt{\theta_2^2 - (2\theta_3)^2}\ \frac{\theta_э\lambda_э}{2\varepsilon\theta_1\theta_3}$$ /19/

Враховуючи /19/, із /13/ знаходимо

$$\lambda_1^0 = \sqrt{\theta_2^2 - (2\theta_3)^2}\ \frac{\theta_э\lambda_э\theta_1}{2\varepsilon\theta_2^2\theta_3}.$$ /20/

З першої формули /12/, беручи до уваги /17/ і /19/, маємо

$$\lambda_3^{\circ} = \frac{2\varepsilon\theta_э\lambda_э\theta_3}{\theta_1\sqrt{\theta_2^2-(2\theta_3)^2}}. \qquad /21/$$

Знаючи коефіцієнти теплопровідності λ_i° / $i = 1, 2, 3$/, визначимо коефіцієнти об"ємної теплоємності C_v° і температуропровідності a_i. Згідно з формулою /10/ для нетермочутливого тіла / $\lambda_i = \lambda_i^{\circ}$ / у момент часу τ_0 при $x=0, y=\frac{d}{2}, z=0$ з врахуванням другої формули /12/ одержуємо, що надлишкова температура має вигляд

$$\theta^*(F_0) = \theta\Big|_{\substack{x=0\\ y=\frac{d}{2},\\ z=0}} = \theta_2\, erfc\,\frac{1}{4\sqrt{F_0}}, \qquad /22/$$

де $F_0 = \frac{a_2\tau}{d^2}$ – критерій Фур"є.

Тоді коефіцієнт температуропровідності в напрямку y визначається за формулою

$$a_2 = \frac{F_0 d^2}{\tau_0}, \qquad /23/$$

а коефіцієнт об"ємної теплоємності

$$C_v^{\circ} = \frac{\lambda_2}{a_2} = \frac{\sqrt{\theta_2^2-(2\theta_3)^2}\,\theta_э\lambda_э\tau_0}{2\delta d\theta_1\theta_3 F_0}. \qquad /24/$$

Маючи вирази C_v°, λ_1°, λ_3° знаходимо коефіцієнти температуропровідності в напрямках x і z за формулами

$$a_1 = \left(\frac{\theta_1 d}{\theta_2}\right)^2\frac{F_0}{\tau_0}, \qquad a_3 = \frac{4\delta^2\theta_3^2 F_0}{(\theta_2^2-\theta_3^2)\tau_0}. \qquad /25/$$

Для термочутливих ортотропних тіл з незалежними від температури коефіцієнтами температуропровідності пропонується наступний метод визначення теплофізичних характеристик. Оскільки a_i не залежить від температури на всьому діапазоні зміни температур, то їх можна визначити за формулами /23/, /25/ відповідно до інтервалу температур, в якому всі теплофізичні характеристики не змінюються залежно від температури.

Продиференціювавши змінну Кіргофа /5/ при $x=0$, $y=\frac{d}{2}$, $z=0$ та її вираз

$$\vartheta\Big|_{\substack{x=0\\ y=\frac{d}{2}\\ z=0}} = \frac{q\,\mathrm{erfc}\,\frac{1}{4\sqrt{F_0}}}{\pi\sqrt{\lambda_1^0\lambda_3^0}\;d} \qquad /26/$$

по τ і прирівнявши результати, одержимо

$$\lambda_3(t_1)=\sqrt{\frac{\lambda_3^0}{\lambda_1^0}}\;\frac{q\,e^{-\frac{1}{16F_0}}}{4\pi^{3/2}F_0^{3/2}\frac{\partial t_1}{\partial F_0}d^2}, \qquad /27/$$

де $t_1=t(0,\frac{d}{2},0,\tau)$.

У виразі /27/ температура t_1 вимірюється протягом всього процесу нагрівання.

Коефіцієнт об"ємної теплоємності

$$C_v(t_1)=\frac{\lambda_3(t_1)}{a_3}. \qquad /28/$$

Всі інші коефіцієнти теплопровідності шукаємо за формулами

$$\lambda_j(t_1)=a_j\,C_v(t_1) \qquad /j=2,3/. \qquad /29/$$

Запропонований спосіб визначення комплексу теплофізичних характеристик ортотропних тіл вимагає заглиблення датчика температури у внутрішній об"єм досліджуючого тіла.

1. Б о р е н Ван. Дефекты в кристаллах. М., 1962.
2. Б е р м а н Р. Теплопроводность твердых тел. М., 1979.
3. К о л я н о Ю.М. Нестационарное температурное поле в термочувствительном теле при разрывном граничном условии второго рода // Инж.-физ. журн. 1987. Т.53. № 3. С.459-467.

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89