УДК 517.564.3:530.145

П.І.Тацуняк

МНОЖЕННЯ ДОДАТНОЧАСТОТНИХ ФУНКЦІЙ ГРІНА ДВОВИМІРНОЇ КВАНТОВОЇ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Як відомо [1], одним із розв"язків неоднорідного рівняння Клейна-Гордона $(\Box - m^2)G(x) = -\delta(x)$ є функція Гріна $G(x)$ у вигляді сингулярної функції Паулі-Йордана

$$\Delta^c(x;m^2)=\frac{1}{2\pi}\int\frac{dk\cdot e^{ikx}}{k^2+m^2-i\varepsilon}, \qquad /1/$$

що відіграє важливу роль причинної функції квантової теорії поля. Тут вибрано метрику типу $x^2=x_1^2-x_0^2$. Причинна функція $\Delta^c(x;m^2)$ є сумою додатно- і від"ємно-частотних сингулярних функцій

$$\Delta^c(x;m^2)=\Delta^+(x;m^2)+\Delta^-(x;m^2), \qquad /2/$$

де

$$\Delta^{\pm}(x;m^2)=\pm\frac{1}{2\pi i}\int dk\,\theta(\pm k_0)\delta(k^2+m^2)e^{ikx} \qquad /2a/$$

$\theta(k_0)$ - функція одиничного стрибка.

Нижче обчислюються вирази $\Delta^+(x;a^2)\Delta^+(x;b^2)$ та $[\Delta^+(x;a^2)]^n$, що використовуються у розв"язках рівнянь моделей теорії поля [2].

Згідно /2a/ записуємо

$$\Delta^+(x;a^2)\Delta^+(x;b^2)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int dk\,dq\,\theta(k_0)\theta(q_0)\delta(k^2+a^2)\delta(q^2+b^2)e^{i(k+q)x} \qquad /3/$$

Помножимо /3/ на вираз, тотожний одиниці

$$\int dp\,\delta(p-k-q)\int dc^2\delta(p^2+c^2)\equiv 1,$$

$$\Delta^+(x;a^2)\Delta^+(x;b^2)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int dc^2\int dp\,e^{ipx}\delta(p^2+c^2)\int dq\,\theta(p_0-q_0)\theta(q_0)\delta[(p-q)^2+a^2]\times \qquad /4/$$
$$\times\delta(q^2+b^2).$$

За допомогою властивості δ -функції

$$\delta[\varphi(x)]=\sum_i\frac{\delta(x-\alpha_i)}{|\varphi'(\alpha_i)|}, \qquad /5/$$

у даному випадку

$$\delta(q^2+b^2)=\frac{1}{2\bar{q}_0}\left[\delta(q_0-\bar{q}_0)+\delta(q_0+\bar{q}_0)\right],\ \bar{q}_0=\sqrt{q_1^2+b^2} \qquad /5a/$$

виконаємо в /4/ інтеграцію по q_0

$$J=\int dq\,\theta(p_0-q_0)\,\theta(q_0)\,\delta[(p-q)^2+a^2]\,\delta(q^2+b^2)=$$

$$=\int\frac{dq_1}{2\bar{q}_0}\,\theta(p_0-\bar{q}_0)\,\delta(-2pq+a^2-b^2-c^2). \qquad /6/$$

Введемо систему координат, в якій $p_1=0,\ p_0=c$. Тоді

$$J=\theta(p_0)\int\frac{dq_1}{2\bar{q}_0}\,\delta(2c\bar{q}_0+a^2-b^2-c^2).$$

Виконуючи заміну $\bar{q}_{0_2}=\sqrt{q_1^2+b^2}=t$, одержуємо

$$J=\theta(p_0)\int\frac{dt\,\delta(2ct-a^2+b^2+c^2)}{2\sqrt{t^2-b^2}}=\theta(p_0)\int\frac{dt\,\delta\left[2c\left(t-\frac{c^2-a^2+b^2}{2c}\right)\right]}{2\sqrt{t^2-b^2}}=$$

$$=\frac{\theta(p_0)}{4c}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{(c^2-a^2+b^2)^2}{4c^2}-b^2}}=\frac{\theta(p_0)}{2\sqrt{(c^2-a^2+b^2)^2-4b^2c^2}}=$$

$$=\frac{\theta(p_0)}{2\sqrt{[c^2-(a+b)^2][c^2-(a-b)^2]}}=\frac{\theta(p_0)\,\theta[c^2-(a+b)^2]}{2\sqrt{(c^2-a^2-b^2)^2-4a^2b^2}}.$$

Повертаючись до /4/, записуємо

$$\overset{+}{\Delta}(x;a^2)\overset{+}{\Delta}(x;b^2)=\frac{1}{2(2\pi)^2}\int\frac{dc^2\,\theta[c^2-(a+b)^2]}{\sqrt{(c^2-a^2-b^2)^2-4a^2b^2}}\int dp\,\theta(p_0)\,\delta(p^2+c^2)\,e^{ipx},$$

звідки, беручи до уваги /2а/, маємо

$$\overset{+}{\Delta}(x;a^2)\overset{+}{\Delta}(x;b^2)=\int dc^2 f(a,b,c)\,\overset{+}{\Delta}(x;c^2), \qquad /7/$$

де

$$f(a,b,c)=\frac{1}{4\pi}\,\frac{\theta[c^2-(a+b)^2]}{\sqrt{(c^2-a^2-b^2)^2-4a^2b^2}}. \qquad /7а/$$

У випадку $a=b=m$ одержуємо

$$[\overset{+}{\Delta}(x;m^2)]^2=\int dc^2 f_1(m,m,c)\,\overset{+}{\Delta}(x;c^2), \qquad /8/$$

де

$$f_1(m,m,c)=\frac{1}{4\pi}\,\frac{\theta(c^2-4m^2)}{\sqrt{c^2(c^2-4m^2)}}. \qquad /8а/$$

Враховуючи явний вид додатно-частотної функції [3]

$$\Delta^+(x;c^2)=\frac{1}{2\pi i}K_0(\sqrt{c^2x^2}),\qquad /9/$$

$$[\Delta^+(x;m^2)]^2=\frac{1}{2(2\pi i)^2}\int_{4m^2}^{\infty}\frac{dc^2K_0(\sqrt{c^2x^2})}{\sqrt{c^2(c^2-4m^2)}}\qquad /9a/$$

дістаємо для $[\Delta^+(x;m^2)]^2$ представлення у вигляді інтеграла, сингулярного у нижній границі. Зауважимо, що строгого змісту /9a/ можна надати, розглядаючи $\Delta^+(x;m^2)$ як узагальнену функцію, визначену на просторі основних функцій Шварца. Тут $K_0(x)$ – функція Макдональда.

За допомогою /7/ обчислюємо вираз

$$[\Delta^+(x;m^2)]^3=\int dc_1 f_1(m;c_1;c_2)\Delta^+(x;c_1^2)\Delta^+(x;m^2)=$$

$$=\int dc_1dc_2 f_1(m,m,c_1)\Delta^+(x;c_1^2)\Delta^+(x;m^2)=\int dc_1dc_2 f_1(m,m,c_1)f_1(m,c_1,c_2)\Delta^+(x;c_2^2),$$

де

$$f_1(m,c_1,c_2)=\frac{1}{4\pi i}\frac{\theta[c_2^2-(c_1+m)^2]}{\sqrt{(c_2^2-c_1^2-m^2)^2-4c_1^2m^2}},$$

або

$$[\Delta^+(x;m^2)]^3=\int dc_1^2dc_2^2 f_2(m;c_1;c_2)\Delta^+(x;c_2^2).\qquad /10/$$

Тут

$$f_2(m;c_1;c_2)=\frac{1}{(4\pi i)^2}\frac{\theta(c_1^2-4m^2)\theta[c_2^2-(c_1+m)^2]}{\sqrt{c_1^2(c_1^2-4m^2)[(c_2^2-c_1^2-m^2)^2-4c_1^2m^2]}}.\qquad /10a/$$

Аналогічно шукаємо $[\Delta^+(x;m^2)]^4$ і за індукцією $[\Delta^+(x;m^2)]^{n+1}$

$$[\Delta^+(x;m^2)]^{n+1}=\int dc_1^2\ldots dc_n^2 f_n(m;c_1;\ldots c_n)\Delta^+(x;c_n^2),\qquad /11/$$

де

$$f_n(m;c_1;\ldots c_n)=\frac{1}{(4\pi i)^n}\frac{\theta(c_1^2-4m^2)\prod_{i=2}^{n}\theta[c_i^2-(c_{i-1}+m)^2]}{\sqrt{c_1^2(c_1^2-4m^2)\prod_{i=2}^{n}[(c_i^2-c_{i-1}^2-m^2)^2-4c_{i-1}^2m^2]}}.\qquad /11a/$$

Маючи на увазі, що $c_i>0$, із нерівностей $\theta(c_1^2-4m^2)\prod\theta[c_i^2-(c_{i-1}+m)^2]$ одержуємо нерівності $c_1>2m$, $c_2-c_1>m,\ldots c_n-c_{n-1}>m$, які дають нижню границю інтегра-ції в /11/

$$\left[\overset{+}{\Delta}(x;m^2)\right]^{n+1}=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{2m}^{\infty}dc_1\int\limits_{3m}^{\infty}dc_2\ldots\int\limits_{nm}^{\infty}dc_n\,\frac{c_1c_2\cdots c_n\,\overset{+}{\Delta}(x,c_n^2)}{\sqrt{c_1^2(c_1^2-4m^2)\prod\limits_{i=2}^{n}\left[(c_i^2-c_{i-1}^2-m^2)^2-4c_{i-1}^2m^2\right]}} \qquad /12/$$

Вираз типу /12/ трапляється у розв"язках рівнянь моделей квантової теорії поля.

1. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Квантовые поля. М., 1980. 2. Тацуняк П.І. Про одну модель в квантовій теорії поля, що має точний розв"язок // Доп. АН УРСР. Сер. А, 1970. № 2. С.133-137. 3. Тацуняк П.И. Доказательство асимптотического условия Хаага для двумерной квантовой теории поля // Укр. мат. журн. 1961. Т.13. С.63-71.

Стаття надійшла до редколегії 30.06.88

УДК 539.014

О.І.Васюник

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ГОФРОВАНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ, НАВАНТАЖЕНОЇ ВНУТРІШНІМ ТИСКОМ

Розглянемо задачу про визначення напружено-деформованого стану тонкої, товщини $2h$, пружної однорідної поперечно-гофрованої по синусоїдальному закону циліндричної оболонки, що знаходиться під дією внутрішнього постійного тиску q_n. Умови закріплення моделюємо пружно та жорстко закріпленими краями.

Серединну поверхню оболонки задаємо рівнянням

$$z = z_0 + \varepsilon f(s), \qquad /1/$$

де z_0 - радіус поперечного перетину поверхні базової колової циліндричної оболонки; ε - малий параметр, що характеризує амплітуду відхилення гофрованої поверхні від відповідної колової циліндричної поверхні; $f(s)=z_0\sin\lambda_k s$ - функція, яка характеризує форму гофрованої поверхні; $\lambda_k=\frac{k\pi}{s^*}$, k - натуральне число, що характеризує частоту гофрованої поверхні; $s\in[0,s^*]$, $\theta\in[0,2\pi]$ - канонічні координати.

Виходячи з лінійної теорії тонких оболонок, що грунтується на гіпотезах Кірхгофа-Лява, для розв"язання задачі використаємо