$$[\overset{+}{\Delta}(x;m^2)]^{n+1}=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{2m}^{\infty}dc_1\int\limits_{3m}^{\infty}dc_2\ldots\int\limits_{nm}^{\infty}dc_n\frac{c_1c_2\cdots c_n\,\overset{+}{\Delta}(x,c_n^2)}{\sqrt{c_1^2(c_1^2-4m^2)\prod\limits_{i=2}^{n}[(c_i^2-c_{i-1}^2-m^2)^2-4c_{i-1}^2m^2]}} \qquad /12/$$

Вираз типу /12/ трапляється у розв"язках рівнянь моделей квантової теорії поля.

1. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Квантовые поля. М., 1980. 2. Тацуняк П.І. Про одну модель в квантовій теорії поля, що має точний розв"язок // Доп. АН УРСР. Сер. А, 1970. № 2. С.133-137. 3. Тацуняк П.И. Доказательство асимптотического условия Хаага для двумерной квантовой теории поля // Укр. мат. журн. 1961. Т.13. С.63-71.

Стаття надійшла до редколегії 30.06.88

УДК 539.014

О.І.Васюник

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ГОФРОВАНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ, НАВАНТАЖЕНОЇ ВНУТРІШНІМ ТИСКОМ

Розглянемо задачу про визначення напружено-деформованого стану тонкої, товщини $2h$, пружної однорідної поперечно-гофрованої по синусоїдальному закону циліндричної оболонки, що знаходиться під дією внутрішнього постійного тиску q_n. Умови закріплення моделюємо пружно та жорстко закріпленими краями.

Серединну поверхню оболонки задаємо рівнянням

$$z = z_0 + \varepsilon j(s), \qquad /1/$$

де z_0 - радіус поперечного перетину поверхні базової колової циліндричної оболонки; ε - малий параметр, що характеризує амплітуду відхилення гофрованої поверхні від відповідної колової циліндричної поверхні; $j(s)=z_0 \sin\lambda_k s$ - функція, яка характеризує форму гофрованої поверхні; $\lambda_k=\frac{k\pi}{s^*}$, k - натуральне число, що характеризує частоту гофрованої поверхні; $s\in[0,s^*]$, $\theta \in [0,2\pi]$ - канонічні координати.

Виходячи з лінійної теорії тонких оболонок, що грунтується на гіпотезах Кірхгофа-Лява, для розв"язання задачі використаємо ключові рівняння оболонок обертання, які в канонічних координатах мають вигляд [1, 4]

$$\ddot{V} + \frac{\dot{r}}{r}\dot{V} - \left(\frac{\dot{r}^2}{r^2} - \nu k_1 k_2\right)V + b k_2 \theta = \frac{1}{D_1 k_2}\left[\dot{q}_n - \frac{2\dot{k}_2}{k_2} q_n - k_2 p_n \frac{d}{dS}\left(\frac{k_1 - k_2}{k_2^2 r^2}\right)\right],$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\dot{r}}{r}\dot{\theta} - \left(\frac{\dot{r}^2}{r^2} + \nu k_1 k_2\right)\theta - k_2 V = 0, \qquad /2/$$

де $p_n = \int\limits_{S_0}^{S} q_n r \dot{r}\, du$; $b = \frac{D_0}{D_1}$, $q_n = const$; $k_1 = -\ddot{r}$, $k_2 = \frac{1}{r}$, $D_0 = 2Eh$; $D_1 = \frac{2}{3}\frac{Eh^3}{1-\nu^2}$,

E – модуль Юнга; ν –коефіцієнт Пуассона.

Граничні умови при $S = 0{,}S^*$ для конкретних умов закріплення мають вигляд:

а/ у випадку пружного закріплення

$$\theta = \mu\left(\dot{\theta} + \nu \frac{1}{r}\dot{r}\theta\right), \qquad /3/$$

$$\dddot{\theta} + (2-\nu)\dot{r} r^{-1}\ddot{\theta} + \dot{\theta}\left[(1+\nu) r^{-1}\ddot{r} - (1+\nu)\dot{r}^2 r^{-2}\right] + \theta\left[\nu r^{-1}\dddot{r} + \right.$$

$$\left. + r^{-3}\dot{r}^3(1+\nu) - \dot{r}\ddot{r} r^{-2}(2-\nu)^2\right] - \frac{q_n}{D_1} + \frac{q_n}{2D_1}\left(\nu - \ddot{r} r + r_0^2 r^{-1}\ddot{r} - \nu r^{-2} r_0^{-2}\right) = 0; \qquad /4/$$

б/ у випадку жорсткого закріплення

$$\theta = 0, \qquad /5/$$

а також умова /4/.

Для розв"язання задач /2/–/4/; /2/, /4/, /5/ використовуємо метод збурення форми границі [2]. Наявність у задачах /2/–/4/; /2/, /4/, /5/ малого параметра ε дає змогу шукати розв"язки задач у вигляді рядів по додатних степенях ε :

$$(\theta, V) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \left(\theta^{(n)}, V^{(n)}\right) \qquad /6/$$

Підставляючи ці розклади в задачі /2/–/4/; /2/, /4/, /5/ і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε , знаходимо сукупність крайових задач для гофрованої циліндричної оболонки, з яких можна отримати розв"язок вхідних задач у потрібному наближенні.

Розв"язавши вихідні задачі /2/-/4/; /2/, /4/, /5/ у нульовому і першому наближенні, осьові σ_1 і кільцеві σ_2 напруження з точністю до ε визначаємо так:

$$\sigma_1^{\pm} = \sigma_1^{\pm(0)} + \varepsilon\sigma_1^{\pm(1)}, \qquad \sigma_2^{\pm} = \sigma_2^{(0)} + \varepsilon\sigma_2^{\pm(1)}, \tag{7}$$

$$\sigma_1^{\pm(0)} = -\frac{D_1}{2h}\left(\pm\frac{3}{h}\dot\theta^{(0)}\right), \quad \sigma_2^{\pm(0)} = -\frac{D_1}{2h}\left[\dot V^{(0)} - \frac{q_n}{D_1}r_0 \pm \frac{3}{h}\left(\nu\dot\theta^{(0)}\right)\right], \tag{8}$$

$$\sigma_1^{\pm(1)} = -\frac{D_1}{2h}\left[\frac{j}{r_0}V^{(0)} - \frac{q_n j}{D_1} \pm \frac{3}{h}\left(\dot\theta^{(1)} + \frac{\nu j\theta^{(0)}}{r_0}\right)\right]; \tag{9}$$

$$\sigma_2^{\pm(1)} = -\frac{D_1}{2h}\left[V^{(1)} - j\frac{q_n}{D_1} \pm \frac{3}{h}\left(\nu\dot\theta^{(1)} + \frac{j\theta^{(0)}}{r_0}\right)\right].$$

У випадку пружного закріплення кут повороту θ і функція напружень V в нульовому і першому наближенні з точністю до ε визначаються так:

$$\theta^{(0)} = d_{10}e^{ps}\cos ps + d_{20}e^{ps}\sin ps + d_{30}e^{-ps}\cos ps + d_{40}e^{-ps}\sin ps, \qquad \tag{10}$$

$$V^{(0)} = r_0\ddot\theta^{(0)};$$

$$\theta^{(1)} = d_{11}e^{ps}\cos ps + d_{21}e^{ps}\sin ps + d_{31}e^{-ps}\cos ps + d_{41}e^{-ps}\sin ps +$$

$$+ R_{11}^{*}e^{ps}\sin(\lambda_k + p)s + W_{11}^{*}e^{ps}\cos(\lambda_k + p)s + R_{12}^{*}e^{ps}\sin(\lambda_k - p)s + \tag{11}$$

$$+ W_{12}^{*}e^{ps}\cos(\lambda_k - p)s + R_{12}^{*}e^{-ps}\sin(\lambda_k + p)s + W_{13}^{*}e^{-ps}\cos(\lambda_k + p)s +$$

$$+ R_{14}^{*}e^{-ps}\sin(\lambda_k - p)s + W_{14}^{*}e^{-ps}\cos(\lambda_k - p)s + q_n Q_1\cos\lambda_k s,$$

$$V^{(1)} = r_0\ddot\theta^{(1)} + j\ddot\theta^{(0)} + j\,\theta^{(0)} + \nu j\,\theta^{(0)},$$

$$Q_1 = \frac{2\lambda_k}{D_1\left(\lambda_k^4 + \frac{b}{r_0^2}\right)}, \qquad p = \sqrt[4]{b r_0^{-2}}\;\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Константи $d_{10}, d_{20}, d_{30}, d_{40}$ знаходимо з граничних умов /3/, /4/, записаних у нульовому наближенні, а константи $d_{11}, d_{21}, d_{31}, d_{41}$ визначаємо з цих же умов, записаних у першому наближенні.

У випадку жорсткого закріплення кут повороту θ і функція напружень V в нульовому наближенні і першому наближенні з точністю до ε шукають з допомогою формул /10/, /11/. Константи $d_{10}, d_{20}, d_{30}, d_{40}$ знаходять з граничних умов

/5/, /4/, записаних у нульовому наближенні, а константи $d_{11}, d_{21}, d_{31}, d_{41}$ визначають з граничних умов, записаних у першому наближенні.

Для проведення числових досліджень розв"язку /7/ складені Фортран-програми. Для дослідження брали стальну гофровану трубу /довжина ℓ = 1325 мм, товщина $2h$ = 8 мм, радіус серединної поверхні r_0 = 265 мм/. Параметри гофрування k = 2; 10; 25; 50; ε = 0,1; 0,15; 0,25. Тиск $0{,}6\,\frac{кГ}{мм^2}$, коефіцієнт пропорційності μ = 0,5; 0,9.

Аналіз напруженого стану поперечно-гофрованої труби, що знаходиться під дією внутрішнього постійного тиску, свідчить, що розглядувані крайові задачі для вказаних оболонок мають швидкозатухаючі у міру віддалення від країв розв"язки. Розподіл напружень по поверхні поперечно-гофрованої оболонки носить нелінійний характер, а величина їх суттєво залежить від частоти і глибини гофрування. Осьові напруження σ_1 з ростом частоти гофрування значно збільшуються в околі країв. Розподіл кільцевих напружень має коливний характер, що відповідає зміні геометрії поверхні оболонки. Зокрема, для зміни параметра гофрування ε = 0,1 ÷ 0,15 кільцеві напруження σ_2 зростають на 23÷35 % порівняно з канонічною формою оболонки. Це узгоджується з результатами досліджень із [3] на основі тривимірної постановки задачі.

1. Г р и г о л ю к Е.И., П о д с т р и г а ч Я.С., Б у р а к Я.Й. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. К., 1978. 2. Г у з ь А.Н., Н е м и ш Ю.Н. Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости. К., 1982. 3. Н е м и ш Ю.Н., Ч е р н о п и с к и й Д.И. Упругое равновесие гофрированных тел. К., 1983. 4. П і д с т р и г а ч Я.С., Я р е м а С.Я. Температурні напруження в оболонках. К., 1961.

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89