УДК 536.12

І.М.Махоркін, А.П.Сеник

ЗАСТОСУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ В ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ПІВБЕЗМЕЖНОЇ КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНИ

Нехай півбезмежна пластина товщиною 2δ, що складається з двох пластин, кожна з яких в плані має форму безмежного прямокутного клина, нагрівається по торцевій поверхні $x=0$ рівномірно розподіленим тепловим потоком потужності q. Через бічні поверхні $z=\pm\delta$ пластин відбувається конвективний теплообмін з зовнішнім середовищем нульової температури, а на поверхні їх спряження $y=0$ мають місце умови ідеального теплового контакту, коефіцієнти тепловіддачі з бокових поверхонь $z=\delta$, $z=-\delta$ однакові, але різні для кожної з пластин. Коефіцієнти теплопровідності матеріалів постійні у межах кожної пластини.

Для визначення усталеного температурного поля неоднорідної системи маємо рівняння

$$\lambda(y)\Delta T+\frac{\partial\lambda(y)}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}-\frac{\alpha(y)}{\delta}T=0 \qquad /1/$$

при таких граничних умовах

$$T\Big|_{|y|\to\infty}\neq\infty, \qquad T\Big|_{x\to\infty}=\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x\to\infty}=0, \qquad /2/$$

$$\lambda(y)\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0}=-q, \qquad /3/$$

де $\lambda(y)$ – коефіцієнт теплопровідності; $\alpha(y)$ – коефіцієнт тепловіддачі з бокових поверхонь $z=\pm\delta$.

Для нашої кусково-однорідної системи зміну $\lambda(y)$ і $\alpha(y)$ залежно від координати y з використанням узагальнених функцій запишемо у вигляді [2]

$$p(y)=p_2+(p_1-p_2)\,S_-(y), \qquad /4/$$

де p_i $(i=1,2)$ – відповідні характеристики першої та другої пластини;

$$S_\pm(\eta)=\begin{cases}1, & \eta>0\\ 0{,}5\pm0{,}25, & \eta=0\\ 0, & \eta<0\end{cases}$$

– осесиметрична одинична функція.

Підставляючи в /1/ – /3/ вирази характеристик у вигляді /4/ та враховуючи при цьому властивості імпульсних узагальнених функцій [2], записуємо

$$\Delta T-\left[\varkappa_2^2+(\varkappa_1^2-\varkappa_2^2)\,S_-(y)\right]T=(1-\kappa)\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0}\delta(y)\,, \qquad /5/$$

$$T\Big|_{|y|\to\infty}\neq\infty\,,\quad T\Big|_{x\to\infty}=\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x\to\infty}=0, \qquad /6/$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0}=-q\left[\frac{1}{\lambda_2}+\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)S_-(y)\right], \qquad /7/$$

де $\kappa=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$; $\varkappa_i^2=\frac{\alpha_i}{\lambda_i\delta}$ $(i=1,2)$.

Застосувавши до /5/ і /6/ з врахуванням /7/ $\cos$ -перетворення Фур"є по x , дістанемо

$$\frac{d^2\bar{T}}{dy^2}-\left[\gamma_2^2+(\gamma_1^2-\gamma_2^2)S_-(y)\right]\bar{T}=$$
$$=(1-\kappa)\frac{d\bar{T}}{dy}\Big|_{y=0}\delta(y)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,q\left[\frac{1}{\lambda_2}+\right. \qquad /8/$$
$$\left.+\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)S_-(y)\right];$$

$$\bar{T}\Big|_{|y|\to\infty}\neq\infty\,, \qquad /9/$$

де $\gamma_i^2=\varkappa_i^2+\xi^2$, $(i=1,2)$.

Розв"язок задачі /8/–/9/, знайдений методом варіації сталих [1], має вигляд

$$\bar{T}=q\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\frac{F_1(\xi)}{\lambda_1(\varkappa_1^2+\xi^2)}\,S_-(y)+\frac{F_2(\xi)}{\lambda_2(\varkappa_2^2+\xi^2)}\,S_+(-y)\right\}, \qquad /10/$$

де $F_1(\xi)=1+\frac{L(\xi)}{\sqrt{\varkappa_2^2+\xi^2}}\,e^{-y\sqrt{\varkappa_1^2+\xi^2}}$;

$$F_2(\xi) = 1 - \frac{L(\xi)}{\sqrt{\varkappa_1^2+\xi^2}} \, e^{y\sqrt{\varkappa_2^2+\xi^2}},$$

$$L(\xi) = \frac{\lambda_1(\varkappa_1^2+\xi^2) - \lambda_2(\varkappa_2^2+\xi^2)}{\lambda_1\sqrt{\varkappa_1^2+\xi^2} + \lambda_2\sqrt{\varkappa_2^2+\xi^2}}$$

Переходячи в /10/ до оригіналів, знаходимо шуканий розв"язок задачі у вигляді

$$T = \frac{2q}{\pi}\left\{\frac{1}{\lambda_1}\left[\int_0^\infty \frac{\cos\xi x}{\varkappa_1^2+\xi^2} \cdot \frac{e^{-y\sqrt{\varkappa_1^2+\xi^2}}}{\sqrt{\varkappa_2^2+\xi^2}} \cdot L(\xi)\,d\xi + \right.\right.$$

$$+ \frac{\pi}{2\varkappa_1} e^{-x\varkappa_1}\Big] S_-(y) - \frac{1}{\lambda_2}\Big[\int_0^\infty \frac{\cos\xi x}{\varkappa_2^2+\xi^2} \cdot \frac{e^{y\sqrt{\varkappa_2^2+\xi^2}}}{\sqrt{\varkappa_1^2+\xi^2}} \times$$

$$\left.\left. \times L(\xi)\,d\xi - \frac{\pi}{2\varkappa_2} e^{-x\varkappa_2}\right] S_+(-y)\right\}. \qquad /11/$$

Підставивши у вираз /11/ $\lambda_1 = \lambda_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$, отримаємо як частковий випадок вираз для визначення усталеного температурного поля в однорідній пластині

$$T = q\,\frac{e^{-x\varkappa}}{\lambda\varkappa}.$$

1. Образцов И.Ф., Онанов Г.Г. Строительная механика скошенных тонкостенных систем. М., 1973. 2. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М., 1984.

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89