УДК 539.3

Д.Г.Хлєбніков, Л.В.Гошко

РОЗРАХУНОК ЗУСИЛЛЯ, ЩО КОМПЕНСУЄ ВІДХИЛЕННЯ ФОРМИ УЩІЛЬНЮЮЧОГО ЕЛЕМЕНТА У ВИГЛЯДІ ТОНКОЇ КІЛЬЦЕВОЇ ПЛАСТИНКИ ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

Розглянемо клапан ущільнюючого з'єднання у формі тонкої кільцевої пластинки радіально-змінної товщини. Пластинка розташована на жорсткій опорі, що має вигляд кола радіуса b, і притискається до опори осьовим зусиллям P, яке передається на пластинку через центральне жорстке ядро радіуса c. Крім цього, на верхню поверхню пластинки діє рівномірно розподілений по кільцю $c \leq r \leq R$ тиск q_1, а на нижню - тиск q_2, розподілений по кругу радіуса b /рис. 1/.

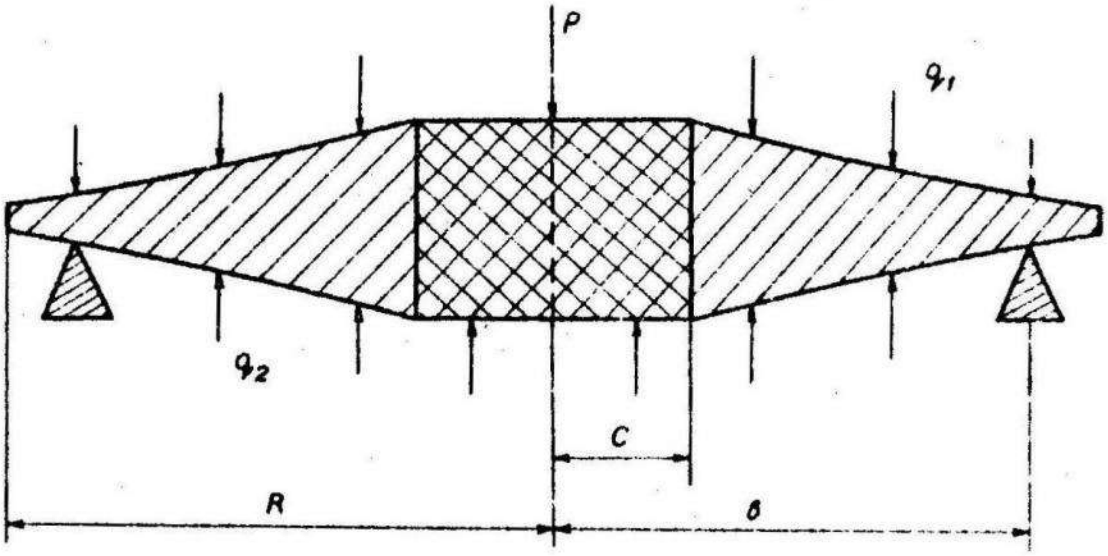

Рис. 1.

Вважається, що опора не є ідеально плоскою. Її відхилення має характер циклічної симетрії і описується функцією

$$f(\varphi) = \frac{d}{2}(1 + \cos n\varphi), \qquad /1/$$

де φ - полярний кут; d - максимальна величина зазору.

Розглянемо задачу визначення мінімальної величини зусилля P, яке необхідне для забезпечення безвідривного контакту між пластинкою й опорою за рахунок деформації пластинчастого елемента.

Диференціальне рівняння згину тонкої пластинки радіально-змінної товщини має вигляд [2]

$$D\Delta\Delta W+\frac{dD}{dr}\left(2\frac{\partial^3 W}{\partial r^3}+\frac{2+\nu}{r}\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial^3 W}{\partial r\partial\varphi^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{3}{r^3}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}\right)+\frac{d^2D}{dr^2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}\right)-q=0, \qquad /2/$$

де W - прогин пластинки; $E;\ \nu$ - модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона; $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$; $D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu)}$; $h(r)$ - змінна товщина пластинки.

Зовнішнє навантаження на пластинку $q=q(r,\varphi)$ можна записати у вигляді

$$q(r,\varphi)=q_1-q_2\chi(b-r)-q_0(\varphi)\delta(r-b), \qquad /3/$$

де $\delta(u)$ - дельта-функція Дірака; $\chi(u)$ - одинична функція Хевісайда.

Для визначення прогину $W(r,\varphi)$ рівняння /2/ слід розв"язати при граничних умовах жорсткого защемлення при $r=C$:

$$W=0;\quad \frac{\partial W}{\partial r}=0 \qquad /4/$$

та вільного краю при $r=R$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}\right)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\Delta W+\frac{1-\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}\right)=0. \qquad /5/$$

Якщо зусилля P, що притискає пластинку до опори таке, що контакт відбувається по всій довжині опорного кола, то умова контакту має вигляд

$$W(b,\varphi)=f(\varphi). \qquad /6/$$

Згідно з /1/ та /6/ прогин $W(r,\varphi)$, а також невідомий контактний тиск $q_0(\varphi)$ шукаємо у вигляді

$$W(r,\varphi)=W_0(r)+W_n(r)\cos n\varphi, \qquad /7/$$

$$q_0(\varphi)=p_0+p_n\cos n\varphi. \qquad /8/$$

З умов рівноваги пластинки та знакосталості контактного тиску знаходимо

$$p_0 = p_n = \frac{P}{2\pi b} + \frac{q_1 (R^2 - c^2)}{2b} - \frac{q_2 b}{2} \qquad /9/$$

Після підстановки виразів /7/, /8/ у рівняння /2/ для визначення $W_n(r)$ одержимо звичайне диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами, яке у випадку зміни товщини за степеневим законом

$$h(r) = h_0 \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{m}{3}} \qquad /10/$$

має вигляд [4]

$$\frac{d^4 W_n}{dr^4} + \frac{2(1+m)}{r}\frac{d^3 W_n}{dr^3} - \frac{1+2n^2 - m(1+\nu+m)}{r^2}\frac{d^2 W_n}{dr^2} +$$

$$+ \frac{(1-m)(1+2n^2-\nu m)}{r^3}\frac{dW_n}{dr} + \frac{n^2(n^2-4+3m-\nu m(m-1))}{r^4} W_n = \frac{p_n}{D}. \qquad /11/$$

З /4/, /5/, /7/ отримуємо крайові умови для функції $W_n(r)$

$$W_n(c) = W_n'(c) = 0, \qquad /12/$$

$$W_n''(R) + \frac{\nu}{R} W_n'(R) - \frac{\nu r^2}{R^2} W_n(R) = 0,$$

$$W_n'''(R) + \frac{1}{R} W_n''(R) - \frac{1+(2-\nu)n^2}{R^2} W_n'(R) + \frac{(3-\nu)n^2}{R^3} W_n(R) = 0. \qquad /13/$$

Загальний розв"язок рівняння /11/ записується як

$$W_n(r) = C_1\left(\frac{r}{R}\right)^{-\lambda_1} + C_2\left(\frac{r}{R}\right)^{-\lambda_2} + C_3\left(\frac{r}{R}\right)^{-\lambda_3} + C_4\left(\frac{r}{R}\right)^{-\lambda_4} + W_n^*(r), \qquad /14/$$

де

$$\lambda_1 = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}} - 1 + \frac{m}{2}; \quad \lambda_2 = \sqrt{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}} - 1 + \frac{m}{2};$$

$$\lambda_3 = -\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}} - 1 + \frac{m}{2}; \quad \lambda_4 = -\sqrt{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}} - 1 + \frac{m}{2};$$

$$\alpha = 1 + n^2 - \frac{m}{2}(1+\nu) + \frac{m^2}{4};$$

$$\beta = \frac{(2-m)^4}{16} + \frac{(2-m)^2}{4}\left(2n^2 + m(1-\nu)\right) + n^2\left(n^2 - 2 + m - (1-m)(2-m\nu)\right). \qquad /15/$$

Частинний розв"язок $W_n^*(r)$, знайдений символічним способом [3], має вигляд

$$W_n^*(r)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad b \le r \le R \\ -\dfrac{P_n b^3}{D_0}\left(\dfrac{R}{b}\right)^m \sum\limits_{i=1}^{4} A_i \left(\dfrac{b}{r}\right)^{\lambda_i} & \quad c \le r < b \end{cases} \qquad /16/$$

де

$$D_0=\frac{E h_0^3}{12(1-\nu)};\quad A_1=\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)};\quad A_2=\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)};$$

$$A_3=\frac{1}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_4)};\quad A_4=\frac{1}{(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)}. \qquad /17/$$

З умов /12/, /13/ маємо систему

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij} C_j^* = b_j; \quad (i=1;2;3;4) \qquad /18/$$

для визначення сталих

$$C_j^*=\frac{D_0 b^m}{P_n b^3 R^m} C_j, \quad (j=1;2;3;4), \qquad /19/$$

де

$$a_{1j}=\left(\frac{R}{c}\right)^{\lambda_j};\; a_{2j}=\lambda_j\left(\frac{R}{c}\right)^{\lambda_j};\; a_{3j}=\lambda_j^2+(1-\nu)\lambda_j-n^2\nu;$$

$$a_{4j}=\lambda_j^3+2\lambda_j^2-n^2\lambda_j(2-\nu)-n^2(3-\nu);$$

$$b_1=\sum_{j=1}^{4} A_j\left(\frac{b}{c}\right)^{\lambda_j};\; b_2=\sum_{j=1}^{4} A_j\lambda_j\left(\frac{b}{c}\right)^{\lambda_j};\; b_3=b_4=0. \qquad /20/$$

Зусилля P визначаємо з умови /6/. Використовуючи /1/ та /8/, дістаємо

$$W_n(b)=\frac{d}{2} \qquad /21/$$

Звідси на основі /7/, /14/ та /19/ одержуємо формулу для визначення мінімального зусилля P

$$P=\frac{\pi d D_0}{b^2 S_n(b)}-q_1\pi(R^2-c^2)+q_2\pi b^2, \qquad /22/$$

де

$$S_n(b)=\sum_{i=1}^{4} C_i^*\left(\frac{R}{b}\right)^{\lambda_i+m},$$

а сталі C_i^* визначаємо з системи /18/.
Випадок для клапана сталої товщини $(m=0)$ досліджено у праці [1].

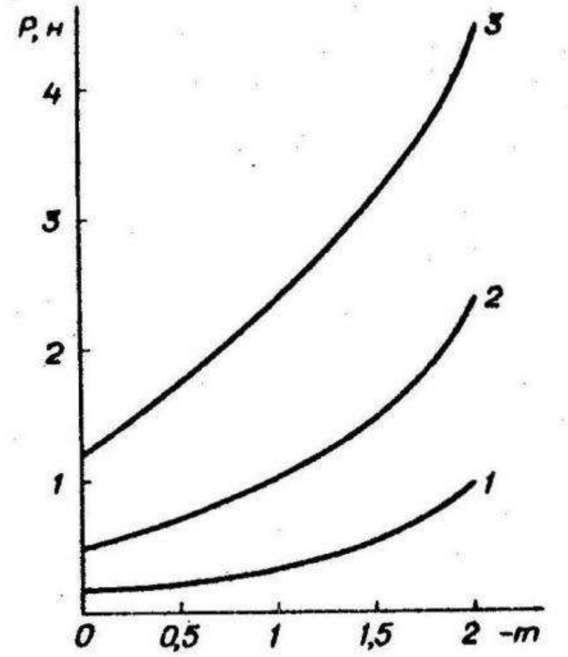

Рис. 2.

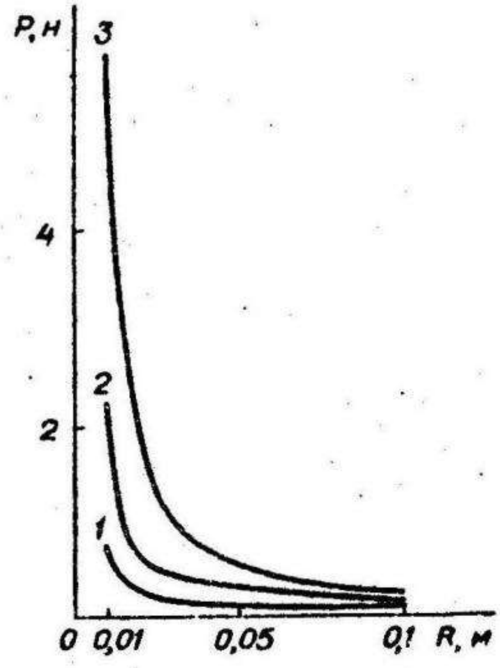

Рис. 3.

На рис. 2, 3 показані графіки залежності зусилля P від показника m /формула 10/ при R = 0,02 м і від радіуса R при m = -0,5 для випадку $q_1 = q_2 = 0$. Криві 1–3 відповідають значенням h_0 = 0,001 м; 0,0015 м; 0,002 м.

Одержані результати легко перенести на випадок, коли функція відхилення форми f задається рядом Фур"є загального вигляду.

1. Гурняк Л.И., Хлебников Д.Г. Неосесимметричная задача формирования герметичного контакта путем деформации элементов в виде тонких кольцевых пластин // Сб. некоторых задач расчета элементов конструкций. - Львов, 1988. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 05.01.1988. № 102 - Ук88. 2. Коваленко А.Д. Круглые пластины переменной толщины. М., 1969. 3. Крылов А.Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. Л., 1950. 4. Левин А.В. Расчет на статический изгиб и на вибрацию дисков гиперболического профиля // Журн. техн. физ. 1937. № 17. С.1754-1767.

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89