УДК 517.53

С.Д.Величко, О.Б.Скасків

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ОДНОГО КЛАСУ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ

Нехай $\{G_\alpha\}$ – сім"я множин на комплексній площині, $\alpha \geq 0$ – параметр, що неперервно змінюється. Вважаємо, що $G_{\alpha_1} \subset G_{\alpha_2}$ для кожних $\alpha_1 < \alpha_2$. Розглянемо послідовність цілих функцій $(\varphi_n(z))$ таких, що $f_n(\alpha) = \sup\{|\varphi_n(z)| : z \in G_\alpha\} < +\infty$ для кожних $n \in N$ та $\alpha \geq 0$. Послідовність $(\varphi_n(z))$ називаємо G_α – правильною [1], якщо при $\alpha \to +\infty$ рівномірно по $n \in N$ виконується

$$f_n(\alpha) = (1+o(1))(\ell(\alpha))^{\beta_n} e^{\lambda_n h(\alpha)},$$

де $\ell(\alpha)$ – додатна неспадна на $[0,+\infty[$ функція; $h(\alpha)$ – додатна диференційована зростаюча до $+\infty$ на $[0,+\infty[$ функція; (λ_n) і (β_n) – неспадні послідовності невід"ємних чисел, при цьому $\lambda_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$. Зауважимо, що [1] G_α – правильними є послідовності (z^n), $(e^{z\lambda_n})$ при $0 \leq \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$, $(E_\rho(\mu_n z))$ при $\rho > \frac{1}{2}$ і $0 \leq \mu_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$, де $E_\rho(z)$ – функція Міттаг-Лефлера, а також деякі інші функціональні послідовності.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(z)$ називаємо регулярно збіжним, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| f_n(\alpha)$ збіжний для всіх $\alpha \geq 0$. Для цілої функції F, представленої регулярно збіжним рядом виду

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(z), \qquad /1/$$

позначимо $M(\alpha) = \sup\{|F(z)| : z \in G_\alpha\}$, а через $\mu(\alpha) = \max\{|a_n| f_n(\alpha) : n \in N\}$ максимальний член і $\nu(\alpha) = \max\{n : |a_n| f_n(\alpha) = \mu(\alpha)\}$ – центральний індекс ряду.

Величину $h\text{-}\mathrm{mes}\, E = \int_{E \cap [0,+\infty[} dh(x)$ називаємо h-мірою множини $E \subset [0,+\infty[$.

<u>Теорема.</u> Якщо для цілої функції F виду /1/ виконується умова

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} < +\infty, \qquad /2/$$

то

$$F(z) = a_\nu \varphi_\nu(z) + o(\mu(\alpha))$$

при $\alpha \to +\infty$ зовні множини скінченної h -міри, рівномірно по $z \in G_\alpha$, де $\nu = \nu(\alpha)$ – центральний індекс ряду /1/.

Наслідок. Якщо для цілої функції виду /1/ виконується умова /2/, то $M(\alpha) \leq (1+o(1))\,\mu(\alpha)$ при $\alpha \to +\infty$ зовні множини скінченної h -міри.

Зауважимо, що асимптотична рівність $M(\alpha) = (1+o(1))\,\mu(\alpha)$ у загальному випадку неможлива, оскільки існують функціональні ряди, для яких нерівність Коші $M(\alpha) \geq \mu(\alpha)$ не виконується.

Метод доведення теореми є модифікацією методу, який застосовувався в [2, 3] до цілих рядів Діріхле, і базується на використанні властивостей G_α -правильної послідовності функцій.

1. Осколков В.А. О росте целых функций, представленных регулярно сходящимися функциональными рядами // Мат. сб. 1976. Т.100, № 2. С.312-334. 2. Скаскив О.Б. Максимум модуля и максимальный член целого ряда Дирихле // Докл. АН УССР. Сер. А. 1984. № 11. С.22-24. 3. Скаскив О.Б., Шеремета М.Н. Об асимптотическом поведении целых рядов Дирихле // Мат. сб. 1986. Т.131, № 3. С.386-402.

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89

УДК 517.531.2

В.М.Сороківський

ПРО ПОВЕДІНКУ НА ДІЙСНІЙ ОСІ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ, ЗАДАНОЇ РЯДОМ ДІРІХЛЕ З КОМПЛЕКСНИМИ ПОКАЗНИКАМИ

У ряді праць [1 - 5] досліджувався зв"язок між поведінкою функції $f(z)$, заданої рядом Діріхле

$$f(z) = \sum_{1}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n} \qquad /1/$$

на дійсній осі, і її зростанням у всій площині, коли $0 \leq \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to \infty)$. Зокрема [5], якщо послідовність (λ_n) додатних чисел задовольняє умовам $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h > 0$ і $n/\lambda_n \to 0\ (n \to \infty)$, то для кожної цілої функції f вигляду /1/ скінченного порядку $\rho < \infty$ виконується рівність $\rho = \rho^*$, де

$$\rho = \overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{\ln\ln M(x,f)}{x},\quad \rho^* = \overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{\ln\ln |f(x)|}{x},\quad M(x,f) = \sup\{|f(x+iy)| : y \in \mathbb{R}\}.$$