при $\alpha \to +\infty$ зовні множини скінченної $h$ -міри, рівномірно по $z \in G_\alpha$, де $\nu = \nu(\alpha)$ – центральний індекс ряду /1/.

Наслідок. Якщо для цілої функції виду /1/ виконується умова /2/, то $M(\alpha) \le (1+o(1))\ \mu(\alpha)$ при $\alpha \to +\infty$ зовні множини скінченної $h$ -міри.

Зауважимо, що асимптотична рівність $M(\alpha) = (1+o(1))\mu(\alpha)$ у загальному випадку неможлива, оскільки існують функціональні ряди, для яких нерівність Коші $M(\alpha) \geqslant \mu(\alpha)$ не виконується.

Метод доведення теореми є модифікацією методу, який застосовувався в [2, 3] до цілих рядів Діріхле, і базується на використанні властивостей $G_\alpha$ -правильної послідовності функцій.

1. Осколков В.А. О росте целых функций, представленных регулярно сходящимися функциональными рядами // Мат. сб. 1976. Т.100, № 2. С.312-334. 2. Скаскив О.Б. Максимум модуля и максимальный член целого ряда Дирихле // Докл. АН УССР. Сер. А. 1984. № 11. С.22-24. 3. Скаскив О.Б., Шеремета М.Н. Об асимптотическом поведении целых рядов Дирихле // Мат. сб. 1986. Т 131, № 3. С.385-402.

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89

УДК 517.531.2

В.М.Сороківський

## ПРО ПОВЕДІНКУ НА ДІЙСНІЙ ОСІ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ, ЗАДАНОЇ РЯДОМ ДІРІХЛЕ З КОМПЛЕКСНИМИ ПОКАЗНИКАМИ

У ряді праць [1 - 5] досліджувався зв"язок між поведінкою функції $f(z)$, заданої рядом Діріхле

$$f(z) = \sum_{1}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n} \qquad /1/$$

на дійсній осі, і її зростанням у всій площині, коли $0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to \infty)$. Зокрема [5], якщо послідовність $(\lambda_n)$ додатних чисел задовольняє умовам $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant h > 0$ і $n/\lambda_n \to 0\ (n \to \infty)$, то для кожної цілої функції $f$ вигляду / 1 / скінченного порядку $\rho < \infty$ виконується рівність $\rho = \rho^*$, де

$$\rho = \varlimsup_{x \to \infty} \frac{\ln\ln M(x,f)}{x}, \quad \rho^* = \varlimsup_{x \to \infty} \frac{\ln\ln |f(x)|}{x}, \quad M(x,f) = \sup\{|f(x+iy)| : y \in \mathbb{R}\}.$$

Аналог цього результату у випадку комплексних показників є наступне твердження.

<u>Теорема</u>. Нехай послідовність різних комплексних чисел $\lambda_n$ задовольняє умови $|\lambda_1| \geq h > 0, -\frac{\pi}{2} + \varphi_0 \leq \arg\lambda_n \leq \frac{\pi}{2} - \varphi_0,\ 0 < \varphi_0 \leq \frac{\pi}{2}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln|\lambda_n|} = 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\ln|1/L'(\lambda_n)|}{\ln|\lambda_n|} = 0,\ L(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) \qquad /2/$$

і ряд /1/ рівномірно збігається у кожному крузі $|z| \leq r,\ 0 < r < \infty$. Тоді $\varkappa^* \geq \varkappa \sin\varphi_0$, де

$$\varkappa = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M_f(r)}{r},\ \varkappa^* = \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\ln\ln|f(x)|}{x},\ M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

Метод Вімана-Валірона, який використовується в [5], для рядів /1/ з комплексними показниками не розроблений. Тому доведення сформульованої вище теореми дещо інше, ніж в [5], і базується на наступних лемах.

Приймемо

$$\Delta t = \frac{2}{\sin\varphi_0} \sum_{|\lambda_n| \leq t} \frac{1}{|\lambda_n|},\ Q_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k e^{t\lambda_k},\ I(r, Q_n) = \left\{\int_{-\infty}^r |Q_n(t)|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Зауважимо, що для будь-якої цілої функції /1/ з показниками з кута $-\frac{\pi}{2} + \varphi_0 \leq \arg\lambda_n \leq \frac{\pi}{2} + \varphi_0$ виконується $I(r, f) < \infty$ тому що $|f(t)| \leq \mathcal{K} e^{|\lambda_1|\sin\varphi_0 t}$ при $t \to -\infty$, $\mathcal{K} = const$, $\mathcal{K} > 0$.

<u>Лема 1.</u> При виконанні умов /2/ для коефіцієнтів квазіполінома $Q_n(t)$ має місце оцінка

$$|a_m| \leq 2|\lambda_m| \left(\prod_{\substack{i=1\\i\neq m}}^\infty \frac{|\lambda_m| + |\lambda_i|}{|\lambda_m| - |\lambda_i|} e^{-\frac{2|\lambda_m|}{|\lambda_i|}}\right) I(s(\lambda_n), Q_n) \left\{\int_0^{\infty} |B_m(t)|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

<u>Лема 2.</u> Нехай $(n/\lambda_n) \to 0$ при $n \to \infty$ і $\varkappa < \infty$. Тоді $h(r) \stackrel{def}{=} \sum_{N+1}^\infty |a_n| e^{|\lambda_n| r} \leq \mathcal{K}_1 < \infty$.

<u>Лема 3.</u> Нехай виконуються умови теореми. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ при $r \geq r_0(\varepsilon)$ справедлива нерівність

$$M(r) \stackrel{def}{=} \sum_1^N |a_n| e^{r|\lambda_n|} \leq (1+\varepsilon) \exp\left(\exp\left(\frac{\varkappa^* r}{\sin\varphi_0}\right)\right).$$

Доведення лем 1 – 3 аналогічне доведенню відповідних лем із [4].

<u>Доведення теореми.</u> З лем 2 і 3 випливає, що

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \max_{|z|=r} \left\{\left|\sum_1^N a_n e^{\lambda_n z}\right| + \left|\sum_{N+1}^\infty a_n e^{z\lambda_n}\right|\right\} \leq \hat{M}(r) + h(r) \leq$$

$$\leq K_2 \exp\left(\exp\left(\frac{\varkappa^* r}{\sin\varphi_0}\right)\right) + K_1 \leq K_3 \exp\left(\exp\left(\frac{\varkappa^* r}{5\sin\varphi_0}\right)\right),$$

тобто $\varkappa \sin\varphi_0 \leq \varkappa^*$.

Нерівність $\varkappa^* \geq \varkappa \sin\varphi_0$ поліпшити не можна. Подібно як і в [4, 5], можна показати істотність другоїумови /2/.


1. Винницкий Б.В., Сорокивский В.М. О росте целых функций, представленных рядами Дирихле. Львов, 1982. Рук. деп. в ВИНИТИ, № 176-82 Деп. 2. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. М., 1976. 3. Леонтьев А.Ф. Последовательности полиномов из экспонент. М., 1980. 4. Сорокивский В.М. О поведении на действительной оси целой функции медленного роста, представленной рядом Дирихле // Изв. вузов. Матем. 1985. № 6. С.40–45. 5. Шеремета М.Н. О росте на действительной оси целой функции, представленной рядом Дирихле // Мат. заметки. 1983. Т.33. Вып. 2. С.235–245.



Стаття надійшла до редколегії 17.03.89



УДК 517.43



О.Н.Фрідман


## ОЦІНКА ЗНИЗУ ФУНКЦІЇ, СУБГАРМОНІЧНОЇ У ПІВПЛОЩИНІ

Оцінки знизу функції, субгармонічної у площині та крузі, розглядались у багатьох роботах /бібліографію див. в [4]. Оцінки в півплощині вивчались менше, типовим є результат Хеймана [8].

Введемо такі позначення: $H_+ = \{z : |z|,$
$H(R) = \{z : |z| < R\} \cap H_+$, $C(z_0, \rho) = \{z : |z - z_0| \leq \rho\}$.

Має місце теорема:

<u>Теорема</u>. Нехай $u$ – субгармонічна в $H_+$ функція і $\Gamma$ – деяка крива

$$\Gamma \subset \{z : \varepsilon < \arg z < \pi - \varepsilon\},\ \varepsilon > 0, \qquad /1/$$

що прямує до $\infty$, на якій $u(z) \geq 0$.

Тоді для довільної додатної функції $A(t)$, $A(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ існує $C^0$-множина [2], с.119-120], зовні якої виконується нерівність $/|z| = r$ /

$$u(z) > -A(r) \sup_{z \in H(r + o(r))} u(z), \quad r \to \infty. \qquad /2/$$