$$\leq K_2 \exp\left(\exp\left(\frac{\varkappa^* r}{\sin\varphi_0}\right)\right) + K_1 \leq K_3 \exp\left(\exp\left(\frac{\varkappa^* r}{5\sin\varphi_0}\right)\right),$$

тобто $\varkappa \sin\varphi_0 \leq \varkappa^*$.

Нерівність $\varkappa^* \geq \varkappa \sin\varphi_0$ поліпшити не можна. Подібно як і в [4, 5], можна показати істотність другої умови /2/.

1. Винницкий Б.В., Сорокивский В.М. О росте целых функций, представленных рядами Дирихле. Львов, 1982. Рук. деп. в ВИНИТИ, № 176-82 Деп. 2. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. М., 1976. 3. Леонтьев А.Ф. Последовательности полиномов из экспонент. М., 1980. 4. Сорокивский В.М. О поведении на действительной оси целой функции медленного роста, представленной рядом Дирихле // Изв. вузов. Матем. 1985. № 6. С.40-45. 5. Шеремета М.Н. О росте на действительной оси целой функции, представленной рядом Дирихле // Мат. заметки. 1983. Т.33. Вып. 2. С.235-245.

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89

УДК 517.43

О.Н.Фрідман

ОЦІНКА ЗНИЗУ ФУНКЦІЇ, СУБГАРМОНІЧНОЇ У ПІВПЛОЩИНІ

Оцінки знизу функції, субгармонічної у площині та крузі, розглядались у багатьох роботах /бібліографію див. в [4]. Оцінки в півплощині вивчались менше, типовим є результат Хеймана [8].

Введемо такі позначення: $H_+ = \{z : |z|,$
$H(R) = \{z : |z| < R\} \cap H_+,\ C(z_0, \rho) = \{z : |z - z_0| \leq \rho\}$.

Має місце теорема:

Теорема. Нехай u – субгармонічна в H_+ функція і Γ – деяка крива

$$\Gamma \subset \{z : \varepsilon < \arg z < \pi - \varepsilon\},\ \varepsilon > 0, \qquad /1/$$

що прямує до ∞, на якій $u(z) \geq 0$.

Тоді для довільної додатної функції $A(t)$, $A(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ існує C^0 -множина [2], с.119-120], зовні якої виконується нерівність $/|z| = r/$

$$u(z) > -A(r) \sup_{z \in H(r+o(r))} u(z), \quad r \to \infty. \qquad /2/$$

Теорема поліпшує один результат Шкаліксва /[7], лема 2.2/. Всі умови в формулюванні теореми суттєві. Приклад функції $u(x,y)=1-y$ свідчить, що умову /1/ послабити не можна. Як показує приклад функції $f(z)$ з [9] у теоремі УШ, якщо $u(z)=\ln|f(z)|$ при $z\in H_+$, то у нерівності /2/ не можна позбутися величини $O(r)$. Дійсно, якщо $A(r)=\ln\ln\ln\ln r$, то з /2/ і нерівності /7.1/ [9] одержуємо

$$-A\ln\ln\ln r\cdot\sup_{z\in H(r)}u(z)>u(z)>-\ln\ln\ln\ln r\sup_{z\in H(r)}u(z),$$

що приводить до протиріччя. Те, що функцію $A(r)$ не можна замінити на як завгодно велику сталу, свідчить приклад функції

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right),\quad z\in H_+,$$

/аналіз прикладу та необхідні посилання див. в [5], с.7-8 /.

Доведення теореми базується на твердженні, яке узагальнює одну лему Говорова /[1], лема 5.4/.

Лема. Нехай u - субгармонічна в області $B=\{z: R<|z|<\beta R\}\cap H_+$, $\beta>1$, функція і z_0 - точка з B така, що $|z_0|=R(1+\beta)/2$ і $u(z_0)\geq 0$. Тоді для довільного $N>1$ існує множина $C=\bigcup_n c(z_n,\rho_n)$, $z_n\in \bar{B}$, така, що $\sum_n\rho_n<R\beta N^{-1/2}$ і в $B\setminus C$ виконується нерівність

$$u(z)>-KN\sup_{z\in B}u(z),$$

де K - додатна стала, яка залежить тільки від β.

Ідея доведення леми запозичена з [1].

Доведення теореми. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $A(t)$ - монотонно зростаюча функція і $A(t)>K$ для всіх $t>0$.

Нехай $R_n=(1+\alpha)^n$, $0<\alpha<1$; $N_n=A(R_n)/K$,

$$B_n=\{z: R_{n-1}\leq|z|<R_{n+1}\}\cap H_+$$

Оскільки при будь-якому натуральному $n>n_0$ існує точка $z_n\in\Gamma$, $|z_n|=(R_{n+1}-R_{n-1})/2$, то, застосовуючи до функції u в B_n лему, одержуємо, що оцінка

$$u(z)>-KN_n\sup_{z\in B_n}u(z) \qquad /3/$$

виконується в $B_n \setminus C_n$, де $C_n = \bigcup_k C(z_k^{(n)}, \rho_k^{(n)})$,
$\sum_k \rho_k^{(n)} < R_{n+1} N_n^{-1/2}$.

Вилучимо з кожної множини C_n, $n > n_0$, множину тих кружків, для яких $z_k^{(n)} \in \{z : R_n \leq |z| < R_{n+1}\} \cap \bar{H}_+$ і позначимо її через C_n^*. Тоді, якщо

$$C = \bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} C_n^* \cup \{z : |z| < R_{n_0}\} = \bigcup_j C(z_j, \rho_j),$$

то суму радіусів виняткових кружків можна оцінити так $/ R_n \leq r = |z| < R_{n+1} /$:

$$\frac{1}{r}\Big(\sum_{\substack{|z_j|<r \\ z_j \in \bar{H}_+}} \rho_j + R_{n_0}\Big) < \frac{R_{n_0}}{R_n} + \frac{1}{R_n}\sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{R_j \leq |z_k^{(j)}| < R_{j+1} \\ z_k^{(j)} \in \bar{H}_+}} \rho_k^{(j)} < \qquad /4/$$

$$< \frac{R_{n_0}}{R_n} + \frac{1}{R_n}\sum_{j=1}^{n} \frac{R_{j+1}}{\sqrt{N_j}} = \frac{R_{n_0}}{R_n} + (1+\alpha)^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{N_j}} \frac{1}{(1+\alpha)^{n-j+1}}.$$

Застосовуючи до другого додатку в правій частині /4/ теорему Тепліца /3/, с.326/, одержимо, що C є C^0 - множиною. Таким чином, з /4/ маємо, що при $R_n \leq r = |z| < R_{n+1}$ і $z \bar{\in} C$ виконується нерівність

$$u(z) > -A(R_n) \sup_{z \in H(R_{n+1})} u(z) > -A(r) \sup_{z \in H((1+\alpha)r)} u(z).$$

Виберемо дві числові послідовності (ε_ν), $\varepsilon_\nu = 2^{-\nu}$; (α_ν) - монотонно прямуюча до нуля, $0 < \alpha_\nu < 1$, $\nu \in \mathbb{N}$. З останньої нерівності одержимо, що для кожного $\nu \in \mathbb{N}$ існує C^0-множина /позначимо її C_ν' /, зовні якої в $H(r)$, $r \geq R_\nu^*$ виконується нерівність

$$u(z) > -A(r) \sup_{z \in H((1+\alpha_\nu)r)} u(z). \qquad /5/$$

Послідовність R_ν' вибираємо так, щоб $R_{\nu+1}' > (\nu+1) R_\nu'$ і при $r \geq R_\nu$ виконувалась нерівність

$$\sum_{z_j^{(\nu)} \in H(r)} \rho_j^{(\nu)} < \varepsilon_\nu r, \quad C(z_j^{(\nu)}, \rho_j^{(\nu)}) \subset C_\nu'.$$

Вилучимо з кожної множини C_ν' ті кружки, для яких виконується умова

$$C(z_j^{(\nu)}, \rho_j^{(\nu)}) \cap \{z : R_\nu' \leq |z| < R_{\nu+1}'\} \cap H_+ \neq \varnothing.$$

Сукупність таких кружків позначимо C'. Тоді C', C^0-множиною. Справді, якщо $C' = \bigcup_j c(z_j, \rho_j)$ і $R'_\nu \le r < R'_{\nu+1}$, то

$$\frac{1}{r} \sum_{z_j \in A(r)} \rho_j < \frac{1}{r} \left(R'_\nu + \sum_{j=1}^{\nu-1} \varepsilon_j R'_{j+1} \right) + \varepsilon_\nu + \varepsilon_{\nu+1} <$$

$$< \frac{1}{R'_\nu} \left(R'_1 + R'_{\nu-1} \sum_{j=1}^{\nu-2} \varepsilon_j \right) + \varepsilon_{\nu-1} + \varepsilon_\nu + \varepsilon_{\nu+1} <$$

$$< \frac{R'_1}{R'_\nu} + \frac{1}{\nu} + \frac{7}{2^{\nu+1}} .$$

Таким чином, при $|z| > R'_\nu$ в $H_+ \setminus C'$ виконується нерівність /5/. Звідки, спрямувавши ν до ∞, одержимо /2/.

1. Говоров Н.В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М., 1986. 2. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М., 1956. 3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. М., 1969. 4. Фридман А.Н. Оценки снизу субгармонических функций // Укр. мат. журн. 1980. Т.32. № 5. С.701-706. 5. Фридман А.Н. Оценки снизу субгармонических функций. Львов, 1979. Рукопись деп. в ВИНИТИ. № 2439. 6. Эйдерман В.Я. Оценки вне исключительных множеств для δ-субгармонических функций в шаре. М., 1981. 7. Шкаликов А.А. Теоремы тауберова типа о распределении нулей голоморфных функций // Мат. сб. 1984. Т.123/165, № 3. С.317-347. 8. Hayman W.K. Questions of regularity connected with Phragmen-Lindelöf principle // J. Math. pures et app. 1956. Vol. 35. № 2. p. 38-45. 9. Hayman W.K. The minimum modulus of large integral functions // Proc. London Math. Soc. 1952. Vol. (3) 2. p. 469-512.

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89