УДК 511

Я.М.Холявка

ОЦІНКА СТЕПЕНЯ ТА ДОВЖИНИ АЛГЕБРАЇЧНОГО ЧИСЛА СПЕЦІАЛЬНОГО ВИДУ

Нехай $\mathbb{A}$ – поле алгебраїчних чисел, $\alpha_i \in \mathbb{A}$, $n_i = \deg \alpha_i$, $l_i = L(\alpha_i)$ – степінь і довжина α_i, $\wp(z)$ – еліптична функція Вейєрштрасса. Відомо, що $\wp(z)$ задовольняє рівняння

$$(\wp'(z))^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3.$$

При вивченні арифметичних властивостей $\wp(z)$ виникає завдання оцінити степінь і довжину числа α_4,

$$\alpha_4^2 = 4\alpha_1^3 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3, \qquad /1/$$

якщо степінь та довжина α_i, i = 1, 2,3 відомі.

<u>Теорема.</u> Нехай $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{A}/\{0\}$,

$$n_{i,j} = \deg \mathbb{Q}(\alpha_i, \alpha_j), \quad m = \deg \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Тоді

$$L(\alpha_4) < \exp\left(4m\left(\frac{\ln L_1}{n_1} + \frac{\ln L_2}{n_2} + \frac{\ln L_3}{n_3} + 1\right)\right), \qquad /2/$$

$$\deg \alpha_4 \geq m\left(\min(3n_{1,2}, n_{1,3}, n_{2,3})\right)^{-1}. \qquad /3/$$

<u>Доведення.</u> Нехай $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbb{Q}(\theta)$, $\alpha_j^{(i)}$ і $\theta^{(i)}$ – спряжені відповідно чисел α_j і θ; $\alpha_j = \varphi_j(\theta)$, $\varphi_j(z) \in \mathbb{Q}[z]$, j = 1, 2, 3. З /1/ випливає, що α_4 буде коренем многочлена

$$\mathcal{P}(z) = \left(a_1^{4n_1^{-1}} a_2^{n_2^{-1}} a_3^{n_3^{-1}}\right)^m \prod_{i=1}^{m}\left(z^2 - \left(4\varphi_1^3(\theta^{(i)}) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \varphi_1(\theta^{(i)}) \cdot \varphi_2(\theta^{(i)}) + \varphi_3(\theta^{(i)})\right)\right), \qquad /4/$$

де a_j – старші коефіцієнти основних многочленів чисел α_j. З теореми 10.2 праці Н.І.Фельдмана * дістаємо $\mathcal{P}(z) \in \mathbb{Z}[z]$. Виконавши множення в /4/, запишемо $\mathcal{P}(z)$ у вигляді суми 7^m до-

---

* Фельдман Н.И. Приближение алгебраических чисел. М., 1981.

данків. З означення довжини многочлена і теореми I.3 отримуємо

$$L(\mathcal{P}) \leq \left(7a_1^{4n_1^{-1}} a_2^{n_2^{-1}} a_3^{n_3^{-1}}\right)^m \prod_{i=1}^{n_1} \max(1, |\alpha_1^{(i)}|)^{\frac{4m}{n_1}} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n_2} \max(1, |\alpha_2^{(i)}|)^{\frac{m}{n_2}} \prod_{i=1}^{n_3} \max(1, |\alpha_3^{(i)}|)^{\frac{m}{n_3}} \leq$$

$$\leq \exp\left(m\left(\frac{4\ln L_1}{n_1} + \frac{\ln L_2}{n_2} + \frac{\ln L_3}{n_3} + \ln 7\right)\right). \qquad /5/$$

Нехай $\mathcal{P}_0$ - основний многочлен числа α_4. Тоді з теореми 4.2 випливає, що $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0^m \mathcal{P}_1$, де $\mathcal{P}_1 \in \mathbb{Z}[z]$. З теореми 3.3 маємо $L(\alpha_4) \leq 4^m L(\mathcal{P})$, що разом з /5/ дає /2/.

Оскільки $\alpha_2 = (\alpha_4^2 - 4\alpha_1^3 - \alpha_3)\alpha_1^{-1}$, то

$$\deg_{\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_3)} \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \leq$$

$$\leq \deg_{\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_3)} \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) \leq \deg \alpha_4.$$

З останньої нерівності дістаємо $\deg \alpha_4 \geq m n_{1,3}^{-1}$. Аналогічно доводиться, що $\deg \alpha_4 \geq m n_{1,2}^{-1}$ і $\deg \alpha_4 \geq m(3n_{1,3})^{-1}$, звідки й випливає /3/.

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89