УДК 512.544

О.Д.Артемович

ГІПОЦЕНТРАЛЬНІ p -ГРУПИ З ДОПОВНЮВАНИМИ НЕАБЕЛЕВИМИ НОРМАЛЬНИМИ ДІЛЬНИКАМИ

Нехай p -просте число, $Z(G)$ - центр групи G, $G'=\gamma_2 G$ - її комутант. Група G називається гіпоцентральною /класу δ /, коли вона володіє /нижнім центральним/ рядом $G=\gamma_1 G \geq \gamma_2 G \geq \ldots \geq \gamma_\beta G \geq \ldots$, де $\gamma_{\alpha+1} G=[G, \gamma_\alpha G]$, якщо α - неграничне, і $\gamma_\beta G=\bigcap_{\lambda<\beta} \gamma_\lambda G$, коли β - граничне, причому $\gamma_\delta G=1$ для деякого порядкового числа δ. Зауважимо також, що нільпотентно апроксимовані групи - це гіпоцентральні групи класу $\leqslant \omega$ і тільки вони. Всі інші означення можна знайти [4, 5].

<u>Твердження 1.</u> Якщо у ненільпотентній групі G доповнювані неабелеві нормальні дільники, то правильне одне із тверджень: а/ підгрупа $\gamma_2 G$ абелева /тобто G - двоступенево розв"язна/; б/ підгрупа $\gamma_2 G$ неабелева і $\gamma_2 G=\gamma_3 G$.

<u>Доведення.</u> Справді, якщо підгрупа $\gamma_2 G$ неабелева і $\gamma_2 G \neq \gamma_3 G$, то $G/\gamma_3 G$ - нільпотентна група з доповнюваним комутантом, що неможливо.

<u>Твердження 2.</u> Нехай G - p -група, причому $G' \leq Z(G)$. Тоді рівносильні наступні твердження: а/ в групі G - доповнювані неабелеві нормальні дільники; б/ в групі G доповнювані неабелеві підгрупи; в/ $G=A \times B$, де B - абелева група експоненти p, A - прямо нерозкладна p -група одного з типів:

С1/ $A=D\langle y\rangle$, де D - нормальна абелева підгрупа експоненти p, $y^p \in Z(A)$;

С2/ A - група Міллера-Морено;

С3/ $A=(\langle a\rangle \times\langle b\rangle) \lambda\langle c\rangle, a^4=b^2=c^2=1,[b, c]=b^2,[a, c]=1$,

С4/ $A=(\langle a\rangle \times\langle b\rangle) \lambda\langle c\rangle, a^4=b^4=c^2=1,[a, c]=a^2,[b, c]=b^2$;

С5/ $A=(\langle a\rangle \times\langle b\rangle \times\langle c\rangle) \lambda\langle d\rangle, a^4=b^2=c^2=d^2=1,[a, d]=a^2$, $[b, d]=c,[c, d]=1$;

В1/ $A=(((\langle a_1\rangle \times\langle a_2\rangle \times\langle a_3\rangle \times\langle a\rangle) \lambda\langle b\rangle) \lambda\langle c\rangle, a_i^p=b^p=c^p=1,[a, b]=a_1$, $[a, c]=a_2,[b, c]=a_3,[a_i, b]=[a_i, c]=1, i=1,2,3$;

В2/ A - прямий добуток з об"єднаним центром двох груп діедра порядку 8;

B3/ A – прямий добуток з об"єднаним центром двох неабелевих груп порядку p^3 і експоненти p, $p>2$;

B4/ $A=(\langle a_1\rangle\times\langle a_2\rangle\times\langle b\rangle\times\langle c\rangle)\leftthreetimes(\langle d\rangle\times\langle f\rangle)$, $\exp A=p$, $[b,d]=a_1$, $[c,d]=a_2$, $[b,f]=1$, $[c,f]=a_1^{\alpha}$, $\alpha\not\equiv 0 \pmod p$, $a_i\in Z(A)$, $p>2$, $i=1,2$;

B5/ $A=(\langle a_1\rangle\times\langle a_2\rangle\times\langle b\rangle\times\langle c\rangle)\leftthreetimes(\langle d\rangle\times\langle f\rangle)$, $\exp A=p$, $[b,d]=a_1$, $[c,d]=a_2$, $[b,f]=a_2$, $[c,f]=a_1^{\alpha}a_2^{\beta}$, $\alpha\not\equiv 0 \pmod p$, $a_i\in Z(A)$, $\beta\in\mathbb{Z}$, $i=1,2$, $p>2$

Доведення проводиться аналогічно, як і в [1]. Використано той факт, що комутант двоступенево нільпотентної групи з доповнюваними неабелевими нормальними дільниками – елементарний абелів.

Твердження 3. Нехай p-група G, в якій доповнювані неабелеві нормальні дільники і $\gamma_2 G \neq \gamma_3 G$ не містить абелевих максимальних підгруп. Тоді:

а/ при $G' \leq Z(G)$ існує така абелева підгрупа Z експоненти p, для якої $G'\cap Z=1$ і $G'\times Z$ – нормальна абелева підгрупа індексу p^2 групи G;

б/ при $G' \nleq Z(G)$ комутант G' містить нормальну в G підгрупу Q індексу p і прообраз центра $Z(G/Q)$ фактор-групи G/Q – нормальна в G абелева підгрупа індекса p^2.

Доведення. Якщо $G' \leq Z(G)$, то це безпосередньо випливає з твердження 2. Тому нехай $G' \nleq Z(G)$. Тоді /див., наприклад, доведення леми 2.5 [1]/ $G=G'\langle b\rangle\leftthreetimes S$, де S – абелева підгрупа експоненти p, $|b|=p$. Далі, комутант фактор-групи $\hat{G}=G/\gamma_3 G$ містить нормальну в $\hat{G}$ підгрупу $\hat{Q}$ індексу p. Тому повний прообраз Q підгрупи $\hat{Q}$ нормальний в G і $|G':Q|=p$. Нехай $\bar{G}=G/Q$. Тоді $|\bar{G}'|=p$, $\bar{G}'\leq Z(\bar{G})$, $\bar{G}=\bar{G}'\langle\bar{b}\rangle\leftthreetimes\bar{S}$, причому $[\langle\bar{b}\rangle,\bar{S}]\neq\bar{1}$. Оскільки $\bar{S}$ – абелева підгрупа експоненти p, то $\bar{S}=(\bar{S}\cap Z(\bar{G}))\times\bar{Y}$, а отже, $\bar{Y}\cap Z(\bar{G})=\bar{1}$. Таким чином, $\bar{G}=\bar{K}\times\bar{F}$, де $\bar{F}=\bar{S}\cap Z(\bar{G})$, $\bar{K}=(\bar{G}'\times\langle\bar{b}\rangle)\leftthreetimes\bar{Y}$. Крім того, $|\bar{K}|=p^3$, підгрупа $\bar{N}=\bar{G}'\times\bar{F}$ збігається з центром $Z(\bar{G})$ фактор-групи $\bar{G}$, а отже, $\bar{N}$ недоповнювана в $\bar{G}$. Звідси випливає, що її повний прообраз N у групі G теж абелева підгрупа і $|G:N|=|\bar{G}:\bar{N}|=p^2$. Твердження доведено.

Наслідок 1: p-група G з доповнюваними неабелевими нормальними дільниками і $\gamma_2 G \neq \gamma_3 G$ містить таку абелеву нормальну підгрупу N індексу p^2, що фактор-група G/N елементарна абелева і, як наслідок, підгрупа G' абелева і $|G:C_G(G')| \leq p^2$.

Теорема 1. Якщо G – гіпоцентральна p-група з доповнюваними неабелевими нормальними дільниками, то $|G'| < \infty$.

Доведення. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що група G прямо нерозкладна і нільпотентно апроксимована. Для двоступенево нільпотентної групи G лема випливає з твердження 2. Тому надалі приймаємо, що $G' \nleq Z(G)$, а отже, $p \leq |G : C_G(G')| \leq p^2$ /див. наслідок 1/.

Нехай $A = C_G(G')$. Тоді $G = G'\langle s\rangle \lambda F$, де F – деяка абелева група експоненти p. Якщо $F \nleq A$, то $G = FA$, $F \cap A \leq Z(G)$, і оскільки G прямо нерозкладна, то $|F| = p$. Тоді $G = G'\langle s, F\rangle$. Легко зауважити, що $|\langle s,F\rangle| < \infty$, $G = \gamma_k G \cdot \langle s,F\rangle (k \in \mathbb{N})$, $\gamma_2 G = \langle s,F\rangle'$, а тому $|\gamma_2 G| < \infty$. Коли ж $F \leq A$, то внаслідок прямої нерозкладності групи G $F \nleq Z(G)$ і $G = \langle G', s, F\rangle = G'\Omega(A)\langle s\rangle$. Оскільки комутант кожної фактор-групи $G/\gamma_k G$, де $k \in \mathbb{N}$, група експоненти p і $\gamma_\omega G = 1$, то $G' \leq \Omega(A)$, а отже, $|G'| < \infty$.

Припустимо тепер, що $C_G(G')$ – неабелева підгрупа індексу p групи G. Оскільки $G' \nleq Z(G)$, то $G = G'\langle d\rangle \lambda B$, де $|d| = p$, а B – абелева підгрупа експоненти p, причому $[G, B] \neq 1$. Крім того, $G = C_G(G') \cdot B$. Приймемо $B_1 = B \cap C_G(G')$. Тоді $B/B_1 \simeq G/C_G(G')$, а тому $|B : B_1| = p$. Нехай $B = B_1 \times \langle b\rangle$, де b – деякий елемент порядку p. Тоді $G/G'B_1 \simeq G'B_1\langle b,d\rangle/G'B_1$ – елементарна абелева група порядку p^2 і, як у [2, лема 2.1], $C_G(G') = G'B_1\langle c\rangle$ для деякого елемента c, причому підгрупа $A = G'\langle c\rangle$ абелева, $|A : G'| = p$ і $A \cap B = 1$. Далі, $|B_1| = p$, $(A\langle b\rangle)' = G'$, а отже, $|A| < \infty$ і $|G'| < \infty$.

Розглянемо врешті випадок, коли $C_G(G')$ – абелева підгрупа індексу p^2. Тоді в G знайдуться такі елементи a і b порядку p, що $G = (C_G(G') \lambda \langle a\rangle) \lambda \langle b\rangle$, $G' = \langle G', a, b\rangle'$, $G'\langle a, b\rangle$ – група з доповнюваними неабелевими нормальними дільниками /див. [2]/, $|G'| < |\langle a,b\rangle| < \infty$. Теорема доведена.

Твердження 4. У гіпоцентральній групі G тоді і лише тоді доповнювані неабелеві нормальні дільники, коли правильне одне із тверджень: Е/ якщо група G періодична, то $G = P \times B$, де B – цілком факторизована абелева група, а P – /прямо нерозкладна/ p -група з доповнюваними неабелевими нормальними дільниками; F /якщо G – група без кручення, то G – центральне розширення абелевої групи за допомогою простої групи; H / якщо G – змішана група, то $\tau G \leq Z(G)$ і $G/\tau G$ – група типу F /, де τG періодична частина G.

Доведення нескладне і ми його опускаємо.

Наслідок 2. У гіпоцентральній p -групі G тоді і лише тоді доповнювані неабелеві нормальні дільники, коли $G = A \times B$, де B – абелева група експоненти p, а А –група одного із типів CI/–C5/, BI/–B5/, або типів:

HI/ $A = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle,\ a^{2^n} = b^2 = 1,\ [a,b] = a^{-2},\ n \geq 2;$

H2/ $A = (\langle a_1 \rangle \times \ldots \times \langle a_{k-1} \rangle \times \ldots \times \langle a_{p-1} \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle,\ p > 2,$

$$a_j^{p^{m-1}} = a_i^{p^m} = x^p = 1,\ 2 \leq k \leq p,\ j = \overline{0, k-2},\ i = \overline{k-1, p-1},\ a_0 = 1,\ m_p = 1,$$

$$[a_{\alpha+1}, x] = a_\alpha\ (\alpha = \overline{1, p-2}),\ m \geq 2,\ pm_t + C_p^t \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p^m),$$

$$[a_1, x] = a_{k-1}^{pm_{p-k+1}} \cdots\ a_{p-2}^{pm_2} a_{p-1}^{pm_1} \prod_{s=0}^{k-2} a_s^{pm_{p-s}},\ pm_\ell + C_p^\ell \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p^{m-1}),$$

$$t = \overline{1, p-k+1},\ \ \ell = \overline{p-k+2, p-1},\ \ m, m_1, \ldots, m_p \in \mathbb{Z};$$

H3/ $A = (C_A(A^\nabla) \leftthreetimes \langle a \rangle) \leftthreetimes \langle b \rangle,\ |a| = |b| = p,$

$$C_A(A^\nabla) = A^\nabla \times R = A^\nabla \times D,\ p > 2,\ [R, \langle a \rangle] = [D, \langle b \rangle] = 1,$$

R, D – абелеві підгрупи експоненти p;

H4/ $A = (\langle a_1 \rangle \times \ldots \times \langle a_k \rangle) \leftthreetimes (\langle b \rangle \times \langle x \rangle),\ |a_1| = |a_i| = |b| =$

$$= |x| = p,\ 2 \leq k \leq p-1,\ [a_k, x] = 1,\ [a_i, x] = a_{i-1},\ [a_{i-1}, b] = 1,$$

$$[a_k, b] = a_1,\ i = \overline{2, k},\ p > 2;$$

H5/ $A = C \leftthreetimes (\langle b \rangle \times \langle x \rangle),\ |b| = p,\ p > 2,\ C \leftthreetimes \langle x \rangle$ – група типу H2/, причому $[a_z, b] = 1,\ z = \overline{1, p-2},$

$$[a_{p-1}, b] = a_{k-1}^{p^{m-1}}.$$

Доведення. Враховуючи теорему I, твердження випливає з теореми 2.1 і наслідку з [3].

1. А р т е м о в и ч О.Д. О конечных нильпотентных группах с дополняемыми неабелевыми нормальными делителями. К., 1984. 2. А р т е м о в и ч О.Д. Строение конечных сверхразрешимых групп с дополняемыми неабелевыми нормальными делителями. К., 1985. 3. А р т е м о в и ч О.Д. О группах с дополняемыми неабелевыми нормальными делителями // Строение групп и свойства их подгрупп. К., 1986. 4. Ч е р н и к о в С.Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М., 1980. 5. Robinson D.J.S. A course in the theory of groups.- New York e.a. 1982.

Стаття надійшла до редколегії 17.05.89

УДК 517:947

О.Л.Горбачук

ПОВЕДІНКА РОЗВ"ЯЗКУ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ З НОРМАЛЬНИМ ОПЕРАТОРОМ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ

Розглядаємо еволюційне рівняння $\frac{dy(t)}{dt} + Ay(t) = 0$, $t \in [0,\infty]$, де A – нормальний оператор в банаховому просторі. Задача Коші поставлена рівномірно коректно, якщо початкові дані $y_n(0) \to 0$, то розв"язок $y_n(t) \to 0$ рівномірно по t на кожному скінченому проміжку [0T] /[2], с.58/. Послідовність функцій $y_n(t)$, $t \in [0,\infty]$ має границю в сенсі Чезаро, якщо існує $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T y_n(\varepsilon)\, d\varepsilon$ /[3], с.519–523/.

Теорема. Обмежений розв"язок рівномірно коректної задачі Коші рівняння $\frac{dy(t)}{dt} + Ay(t) = 0$, де A – нормальний оператор, має границю при $t \to \infty$ в сенсі Чезаро.

Доведення. Оскільки задача Коші поставлена рівномірно коректно, то A – генератор півгрупи $u(t)$ класу C_0 [2]. Враховуючи, що $A_{\lambda t}$ – нормальний оператор, одержуємо представлення $u(t) = \int_c e^{-\lambda t}\, dE_\lambda$ [3] і $y(t) = \int_c e^{-\lambda t} dE_\lambda f$, де $y(0) = f$ і інтегрування відбувається по комплексній площині. Далі потрібна лема.

Лема. Якщо розв"язок $y(t)$ рівняння $\frac{dy}{dt} + Ay(t) = 0$, де A – нормальний оператор, обмежений, то носій спектральної міри $(E_\lambda f, f)$, $f = y(0)$ лежить у правій півплощині $Re\lambda \geq 0$ /тобто міра $E_\lambda f, f$ зосереджена в $Re\lambda \geq 0$/.